

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

HUYNH HUU THANH



Sujet de la thèse : Commande auto-adaptative numérique d'un système linéaire.
Application à un système du second ordre.

Soutenue le 18 décembre 1970 devant la Commission d'examen

MM. E. ROUBINE

Président

BONNEFILLE

R. PRUDHOMME

} Examinateurs

J. P. MAREC

Invité

O. N. E. R. A.

29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON

1970

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

HUYNH HUU THANH



Sujet de la thèse : Commande auto-adaptative numérique d'un système linéaire.
Application à un système du second ordre.

Soutenue le 18 décembre 1970 devant la Commission d'examen

MM. E. ROUBINE

Président

BONNEFILLE

R. PRUDHOMME

} Examineurs

J. P. MAREC

Invité

O. N. E. R. A.

29, Avenue de la Division Leclerc,

92 CHATILLON

1970



TABLE DES MATIÈRES

Ma profonde gratitude va à Monsieur le Professeur E. ROUBINE pour m'avoir fait l'honneur de présider le Jury d'Examen.

J'exprime ma grande reconnaissance à Monsieur le Professeur R. PRUDHOMME qui m'a conseillé et guidé avec bienveillance tout au long de ce travail.

Ma gratitude s'adresse également à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales et à Monsieur P. CONTENSOU, Chef du Département des Etudes de Synthèse, qui m'ont fourni les moyens nécessaires pour mener à bien cette étude.

Je remercie vivement Monsieur M. BISMUT, Chef de Division, et Monsieur J.P. MAREC, Chef de Groupe, dont les conseils m'ont été très précieux.

Je remercie également Monsieur C. AUMASSON, de l'O.N.E.R.A., pour des discussions très utiles, et Monsieur le Professeur BONNEFILLE qui a bien voulu accepter de faire partie du Jury.

Merci enfin à ceux qui ont participé à l'édition de cette thèse.

-----oooOooo-----

1. INTRODUCTION

- 1.1. Motifs généraux
- 1.2. Problème
- 1.3. Méthode générale
- 1.4. Méthode particulière

2. ÉTUDE

- 2.1. Définition
- 2.2. Étude des différents types de systèmes
- 2.3. Étude des différents types de systèmes
- 2.4. Étude des différents types de systèmes
- 2.5. Étude des différents types de systèmes

CONCLUSION

- ANNEXE I - Exemple de système de commande
- ANNEXE II - Exemple de système de commande
- ANNEXE III - Exemple de système de commande
- ANNEXE IV - Exemple de système de commande
- ANNEXE V - Exemple de système de commande
- ANNEXE VI - Exemple de système de commande

REFERENCES

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	2
NOTATIONS	3
INTRODUCTION	4
I - DISCRÉTISATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE	6
I ₁ - Cas général	6
I _{1,1} - Hypothèses sur le système linéaire	6
I _{1,2} - Equation discrète	6
I ₂ - Cas d'un système stationnaire	7
I _{2,1} - Equation discrète - Validité de la discrétisation	7
I _{2,2} - Equation récurrente	8
I _{2,3} - Conclusion sur les équations discrètes	10
I ₃ - Exemple	10
I _{3,1} - Equation continue	10
I _{3,2} - Equations discrètes d'un système stationnaire	11
II - IDENTIFICATION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE	13
II ₁ - Cas d'un système stationnaire	13
II _{1,1} - Définition du problème - Choix du modèle	13
II _{1,2} - Critère d'identification	14
II _{1,3} - Minimisation du critère	15
II _{1,4} - Initialisation de l'identification	16
II _{1,5} - Généralisation : identification d'un système à observation non scalaire	19
II _{1,6} - Conclusion	22
II ₂ - Identification approchée d'un système non stationnaire	22
II _{2,1} - Principe de l'identification	22
II _{2,2} - Identification avec un modèle stationnaire approché	24
II _{2,3} - Normalisation du critère d'identification	25
II ₃ - Exemple	25
II _{3,1} - Données de la simulation numérique	25
II _{3,2} - Identification d'un système du second ordre stationnaire	25
II _{3,3} - Identification d'un système du second ordre non stationnaire	28
II _{3,4} - Conclusion	29
III - COMMANDE SOUS-OPTIMALE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE	30
III ₁ - Définition du problème	30
III ₂ - Commande optimale	31
III _{2,1} - Commande optimale d'un système linéaire à temps final fini	31
III _{2,2} - Commande optimale d'un système stationnaire à temps final infini	33
III ₃ - Commande sous optimale	35
III _{3,1} - Choix de la commande	35
III _{3,2} - Stabilité de la matrice d'évolution en boucle fermée	36
III _{3,3} - Calcul numérique de la commande sous optimale	37
III ₄ - Exemple	38
III _{4,1} - Rappel des données - Indice de coût	38
III _{4,2} - Influence du choix du coefficient de pondération de l'indice de coût sur le comportement du système optimal	39
III _{4,3} - Calcul numérique de la commande sous optimale	41
III _{4,4} - Comparaison des performances du système optimal et du système sous optimal	41
III _{4,5} - Conclusion	42
IV - AUTO-ADAPTATION NUMÉRIQUE	43
IV ₁ - Méthode générale	43
IV _{1,1} - Principe	43
IV _{1,2} - Méthode « exacte »	44
IV _{1,3} - Méthode « approchée »	46
IV ₂ - Exemple	47
IV _{2,1} - Données	47
IV _{2,2} - Elimination d'un éventuel « couplage » de la boucle d'auto-adaptation	49
IV _{2,3} - Auto adaptation du système non stationnaire	53
IV _{2,4} - Comparaison avec le cas du système muni de deux commandes particulières	54
IV _{2,5} - Estimation du temps d'exécution	56
CONCLUSION	57
ANNEXE I - Equation récurrente d'un système linéaire	58
ANNEXE II - Minimisation du critère d'identification	60
ANNEXE III - Commande optimale d'un système linéaire à temps discret avec un indice de coût quadratique	64
ANNEXE IV - Commande optimale d'un système stationnaire avec un indice de coût quadratique et un horizon infini	67
ANNEXE V - Exemple d'un système du second ordre	75
ANNEXE VI - Estimation du temps d'exécution pour un calculateur numérique	79
RÉFÉRENCES	82

COMMANDE AUTO-ADAPTATIVE NUMÉRIQUE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

APPLICATION A UN SYSTÈME DU SECOND ORDRE

par HUYNH Huu Thanh

RÉSUMÉ

On expose dans la présente thèse une méthode d'auto-adaptation numérique de la commande d'un système linéaire de façon à minimiser un indice de performance quadratique. La méthode nécessite l'identification des paramètres caractéristiques du système, effectuée ici par la méthode de la minimisation quadratique ; le cas d'une observation incomplète de l'état du système est également envisagé. Pour la commande, on propose une loi sous-optimale en remplacement de la loi optimale, inapplicable dans le cadre de l'auto-adaptation. L'exemple d'un système du second ordre est traité pour illustrer la méthode.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Optimisation - Commandes optimales - Commandes automatiques - Commandes auto-adaptation - Commandes numériques - Systèmes linéaires.



SELF-ADJUSTING NUMERICAL CONTROL OF A LINEAR SYSTEM,

APPLICATION TO A SECOND-ORDER SYSTEM,

SUMMARY

The present thesis describes a method for the numerical self-adjustment of the control of a linear system involving minimization of a quadratic performance index. The method calls for the characteristic system parameters to be identified ; this is effected here by the method of quadratic minimization. The case of an incomplete observation of the state of the system is also considered. For control a sub-optimal law is put forward as a substitute for the optimal law, which is inapplicable to self-adjustment. An example of a second-order system is discussed to illustrate the method.

Descriptors (NASA thesaurus) : Optimization - Optimal control - Automatic control - Adaptation control - Feedback control - Self adaptive control systems - Numerical control - Linear systems.

NOTATIONS

i, j, h, k, l, n	: paramètres entiers positifs
u, s	: variables scalaires représentant respectivement l'entrée (ou la commande) et la sortie du système
x, y	: vecteurs (de dimension n) de composantes x^i, y^i
z	: vecteur d'observation (de dimension p) de composantes z^i
t	: temps
T	: période d'échantillonnage
a_i, b_i	: coefficients du système linéaire
A	: matrice $n \times n$
B	: matrice $n \times 1$
C	: matrice $p \times n$
F, D, H	: matrices $n \times n$
G, E	: matrices $n \times 1$
Φ	: matrice de transition $n \times n$
$\mathcal{E}$	: critère d'identification
γ	: vecteur $(2n)$ de composantes γ^i
ζ	: vecteur colonne (l)
Ω	: matrice $l \times 2n$
Γ	: matrice $p \times (n+l)$
Z	: matrice $l \times p$
p	: vecteur de dimension n
v	: vecteur de dimension l
M	: matrice $l \times (n+1)$
Ψ	: vecteur adjoint
P	: matrice symétrique $n \times n$
U	: matrice $1 \times n$
Q	: matrice symétrique $n \times n$
L	: matrice $p \times n$
μ, λ	: scalaires
J	: indice de coût, ou de performance
J_k	: coût restant
θ, q	: assiette, vitesse angulaire de la fusée-sonde
a, b, c	: coefficients du système du second ordre

Notations générales

I	: matrice unité
x^T, A^T	: transposé de x , de A
$\ x\ $	: norme du vecteur x

$\|A\|$: norme de la matrice A

Indice, exposant

x_k, F_k : valeurs de x, F à l'instant kT

exposant (*) : relatif à la commande optimale (cf. chapitre III)

exposant (a) : relatif à la commande sous-optimale (cf. chapitre III)

INTRODUCTION

Le pilotage des avions modernes ou des fusées dont les paramètres de vol varient dans un large domaine nécessite des systèmes de commande plus élaborés que les systèmes classiques.

Les solutions envisagées à ce problème sont, en général, classées en deux catégories :

- 1°) - les systèmes parfois appelés systèmes auto-adaptatifs passifs dans lesquels des circuits de compensation complexes, généralement non linéaires, rendent les performances du système contrôlé peu sensibles aux variations des caractéristiques de l'avion ou de la fusée ;
- 2°) - les systèmes auto-adaptatifs proprement dits, encore appelés systèmes auto-adaptatifs actifs par opposition aux précédents, dans lesquels un certain nombre de paramètres réglables sont ajustés, à chaque instant, en fonction des caractéristiques (calculées à partir des mesures) du système à piloter.

Nous nous intéressons particulièrement aux systèmes actifs qui présentent par rapport aux systèmes passifs l'intérêt majeur de fournir de bonnes performances dans un domaine de vol plus étendu.

Toutefois, dans leur réalisation, des difficultés importantes sont rencontrées. Les systèmes auto-adaptatifs doivent, en effet, remplir deux fonctions qui sont l'identification des paramètres caractéristiques et l'élaboration de la commande du système. A cause de l'évolution rapide de ces paramètres, cette identification se révèle délicate. Elle peut se faire de deux façons :

- ou bien on perturbe le système par un signal connu judicieusement choisi ; la réponse à ce signal permet d'identifier les valeurs des paramètres. Ces sollicitations continues risquent de "fatiguer" les structures du système ;
- ou bien on utilise uniquement les perturbations extérieures. Dans ce cas, une bonne identification est conditionnée par la fréquence de ces perturbations.

D'autre part, une détérioration des performances du système à stabiliser peut se produire à cause des interactions possibles, difficiles à prévoir, entre la "boucle" principale de pilotage et la "boucle" d'adaptation des paramètres (voir, par exemple, [20]).

Les premières études ont porté sur les systèmes auto-adaptatifs analogiques. Les récents développements des calculateurs numériques, offrant la possibilité de fonctionner en temps réel (grâce à la rapidité des calculs, à l'encombrement réduit pour un volume de mémoires important), permettent d'envisager des systèmes numériques dont les possibilités sont au moins aussi étendues que celles des systèmes analogiques.

Ce sujet a déjà retenu l'attention de divers auteurs, citons par exemple les études de Zaborsky et Coll. et de Perbet, que nous commentons ici brièvement pour mieux les situer par rapport à notre étude.

Zaborsky et Coll. [22], [23] développent une méthode basée sur les principes suivants :

- l'identification est faite par résolution d'un système linéaire ;
- la commande est choisie de façon à minimiser une fonction quadratique de l'écart à l'instant suivant.

La méthode est ensuite appliquée à de nombreux exemples numériques où l'on observe la réponse du système à plusieurs types de signal d'entrée connus. Elle présente l'avantage de la simplicité des calculs numériques et l'inconvénient de mauvaises performances du système.

Perbet [15] applique une méthode plus élaborée à la stabilisation en tangage d'une fusée. Le processus d'identification, utilisant la méthode du modèle, est déclenché à l'arrivée d'une rafale de vent qui perturbe la fusée. La loi de pilotage est ensuite calculée en fonction des coefficients identifiés suivant la technique des filtres à temps de réponse fini [5] (la commande doit être telle que l'écart soit annulé au bout d'un temps fini fixé). Pour obtenir de bonnes performances, il s'est

trouvé nécessaire d'effectuer une extrapolation constante des paramètres identifiés et l'on doit supposer, en outre, connue l'allure des courbes d'évolution de ces paramètres.

La méthode d'auto-adaptation proposée dans l'étude qui suit présente les aspects suivants :

- le problème est du type régulateur, il s'agit d'annuler l'écart de l'avion (ou de la fusée) par rapport à sa trajectoire nominale. Cet écart est caractérisé par un vecteur d'état dont les composantes sont la sortie et ses dérivées successives ;
- le processus d'identification est déclenché lorsqu'un écart non nul est détecté. L'identification doit cependant s'effectuer à partir d'une observation incomplète de l'état du système (on observe seulement certaines combinaisons linéaires des composantes du vecteur d'état) ; ce point est une des particularités de l'étude ;
- la commande est calculée de façon à minimiser un indice de performance quadratique de l'état et de la commande. On verra que la loi de commande optimale, impossible à utiliser dans un contexte d'auto-adaptation, sera remplacée par une loi sous-optimale. Le choix de cette dernière constitue une autre particularité de l'étude ;
- enfin, étant donné la nature séquentielle des opérations élaborées par le calculateur numérique, le problème est traité en temps discret.

Pour illustrer la méthode, on considère un exemple du second ordre, inspiré du problème de la stabilisation en tangage d'une fusée-sonde de l'O.N.E.R.A. La simulation de l'exemple est effectuée sur un calculateur numérique IBM 360-50 où, dans la mesure du possible, on utilise les sous-programmes existants.

Cette étude comporte quatre chapitres :

- le chapitre I rappelle les résultats concernant la discrétisation d'un système linéaire monovariable continu ;
- le chapitre II traite l'identification d'un système linéaire suivant la méthode classique des moindres carrés ;
- dans le chapitre III, on propose une loi de commande sous-optimale qui remplace la loi optimale, inapplicable dans le cadre de l'auto-adaptation numérique ;
- enfin, le chapitre IV traite l'auto-adaptation numérique d'un système linéaire.

L'exemple numérique est considéré à la fin de chaque chapitre.

9

I - DISCRÉTISATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE

Après avoir introduit les hypothèses sur le système étudié et rappelé la forme générale de l'équation discrète, on développe le cas du système stationnaire ; un exemple est ensuite précisé avec les expressions discrètes correspondantes.

I,1 - Cas général

I,1.1 - Hypothèses sur le système linéaire

On considère dans cette étude le cas d'un système linéaire dont l'évolution peut être représentée par une équation différentielle de la forme :

$$(I,1) \quad \dot{s}^{(n)} + a_{n-1}(t) \dot{s}^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \dot{s} + a_0(t) s = b_0(t) u$$

où les dérivées successives de l'entrée u n'interviennent pas au second membre. Le cas d'un système linéaire d'équation plus générale peut également être traité par la méthode présentée dans cette étude, on y reviendra ultérieurement (remarque du § I,1.2).

L'équation (I,1) peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre.

En posant :

$$x^1 = s ; x^2 = \dot{s} ; \dots ; x^n = \dot{s}^{(n-1)}$$

on obtient l'équation équivalente de (I,1) :

$$(I,2) \quad \dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) u(t)$$

avec :

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

On observe à chaque instant un vecteur z lié à l'état x du système par la relation linéaire :

$$(I,3) \quad z = C x$$

où z est un vecteur à p composantes et C une matrice constante d'éléments connus, de rang p .

On supposera que n (dimension de l'état x) est un multiple entier de p (dimension de l'observation z).

I,1.2 - Equation discrète

L'intégration du système (I,2) entre deux instants t_0 et t donne [4] :

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \\ z(t) = C x(t) \end{cases}$$

où la matrice de transition $\Phi(t, t_0)$, indépendante de l'entrée $u(t)$, est obtenue par la résolution de l'équation différentielle matricielle :

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0)$$

avec :

$$t \geq t_0, \quad \Phi(t_0, t_0) = I$$

La commande u étant calculée à partir d'un calculateur numérique, on la choisit constante entre deux instants d'échantillonnage.

Entre deux instants discrets kT et $(k+1)T$, ce système s'écrit :

$$(I,4) \quad \begin{cases} x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k \\ z_k = C x_k \end{cases}$$

avec :

$$x(kT) = x_k, \quad u(kT) = u_k, \quad y(kT) = y_k, \\ F_k = \Phi[(k+1)T, kT], \quad G_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, z] B(z) dz.$$

Remarques :

1°) - La commande u_k présente une discontinuité d'amplitude $u_k - u_{k-1}$ à l'instant d'échantillonnage kT . Cependant, l'état x_k du système reste continu à cet instant car les dérivées de la commande n'interviennent pas au second membre de l'équation d'évolution (I,1).

2°) - C'est pour éviter une discontinuité de l'état aux instants d'échantillonnage que cette étude est traitée avec l'hypothèse restrictive concernant l'équation (I,1). Dans le cas où le système est régi par l'équation différentielle plus générale :

$$s^{(n)} + a_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{s} + a_0 s = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u$$

où $b_m \neq 0$, cette discontinuité peut être évitée si l'on prend comme commande la dérivée la plus élevée de l'entrée $u(t)$. Les résultats de cette étude sont alors valables pour ce système, il suffit de considérer un vecteur d'état augmenté dont les composantes sont définies ainsi :

$$x^1 = s, \quad x^2 = \dot{s}, \quad \dots, \quad x^n = s^{(n-1)}, \quad x^{n+1} = u, \quad \dots, \quad x^{n+m} = u^{(m-1)}, \quad v = u^{(m)}$$

L'équation matricielle correspondante s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dots \dots \dots \\ \dot{x}^{n-1} = x^n \\ \dot{x}^n = -a_0 x^1 - a_1 x^2 - \dots - a_{n-1} x^n + b_0 x^{n+1} + b_1 x^{n+2} + \dots + b_{m-1} x^{n+m} + b_m v \\ \dot{x}^{n+1} = x^{n+2} \\ \dots \dots \dots \\ \dot{x}^{n+m} = v \end{cases}$$

La discrétisation sera effectuée avec $v = u^{(m)}$ constante entre les instants d'échantillonnage.

I,2 - Cas d'un système stationnaire

I,2.1 - Equation discrète - validité de la discrétisation

Lorsque le système continu (I,2) est stationnaire, l'équation discrète (I,4) devient :

$$(I,5) \quad \boxed{\begin{cases} x_{k+1} = F x_k + G u_k \\ y_k = C x_k \end{cases}}$$

où les matrices F et G sont constantes et sont données par les relations [4] :

$$F = e^{AT} = I + AT + \dots + \frac{A^n T^n}{n!} \\ G = A^{-1} [e^{AT} - I] B$$

On suppose que l'équation discrète (I,5) permet de définir sans "ambiguïté" l'évolution du système continu correspondant (I,2). Cette notion intuitive se traduit par la propriété suivante : le système (I,5) obtenu par discrétisation d'un système continu qui est observable et commandable (d'après [11]) reste observable et commandable (un rappel des définitions de l'observabilité et de la commandabilité des systèmes linéaires est donné en annexe I). Cette propriété est vérifiée lorsque les

valeurs propres λ_i de la matrice d'évolution du système continu satisfont la condition [12] :

$$\text{Si } \operatorname{Re}(\lambda_i) = \operatorname{Re}(\lambda_j) \Rightarrow \operatorname{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2\pi k}{T}$$

où k est un entier quelconque et T est la période d'échantillonnage.

Autrement dit, le système (I,5) est observable et commandable lorsqu'aucune des fréquences propres du système (I,2) n'est un multiple entier de la fréquence d'échantillonnage.

I,2.2 - Equation récurrente

On va considérer un changement de base dans l'espace d'état qui permet d'écrire le système (I,5) sous la forme d'une équation récurrente reliant directement les observations z_k aux entrées u_k . Cette équation sera utile pour l'identification du système.

On traite d'abord le cas général de l'observation vectorielle ($p > 1$), les cas particuliers de l'observation complète et scalaire sont ensuite considérés dans les applications.

I,2.2.1 - Cas général

Soit le nombre entier l défini ainsi :

$$l = \frac{n}{p} \quad (1 \leq l \leq n)$$

n et p étant respectivement la dimension de l'état et de l'observation du système.

Cherchons d'abord à simplifier la forme des matrices F et G de l'équation discrète (I,5). Considérons pour cela le changement de base défini par la relation :

$$y_k = M x_k$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CF \\ \dots \\ CF^{l-1} \end{bmatrix}$$

y_k : vecteur de dimension n

M : matrice carrée $n \times n$, supposée inversible.

Le système (I,5) devient alors :

(I,6)

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= D y_k + E u_k \\ z_k &= [I^p, 0, \dots, 0] y_k \end{aligned}$$

Les matrices D et E sont de la forme (la démonstration est détaillée en Annexe I) :

$$D = MFM^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I^p & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & & & I^p \\ D^1 & D^2 & \dots & & D^l \end{bmatrix}, \quad E = MG = \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \dots \\ e^n \end{bmatrix}$$

où :

I^p : matrice identique de dimension $p \times p$

$D^1, D^2, \dots, D^l$: sont des matrices carrées ($p \times p$).

Au moyen de ce changement de base on obtient une équation d'état discrète équivalente à l'équation (I,5) dont les matrices caractéristiques F et C prennent une forme simplifiée.

La matrice D est en effet caractérisée par $n \times p$ éléments des sous-matrices $D^1, D^2, \dots, D^l$, les autres éléments étant nuls ou égaux à l'unité. D'autre part, les p premières composantes du vecteur d'état y_k constituent le vecteur observation z_k .

On peut déduire du système (I,6) une équation récurrente faisant intervenir uniquement les z_i et u_i .

Posons :

$$E^T = [E^{1T}, E^{2T}, \dots, E^{lT}]$$

où les E^{iT} sont des vecteurs lignes ($1 \times p$) d'éléments :

$$E^{iT} = [e^{ip-p+1}, e^{ip-p+2}, \dots, e^{ip}]$$

On obtient la relation suivante : (la démonstration est développée en Annexe I)

(I,7)

$$\begin{aligned} z_{k+l} = & D^1 z_k + D^2 z_{k+1} + \dots + D^l z_{k+l-1} + E^1 u_{k+l-1} + \dots \\ & + (E^{l-1} - D^l E^{l-2} \dots - D^{l-1} E^1) u_{k+i} + \dots + (E^l - D^l E^{l-1} \dots - D^2 E^1) u_k \end{aligned}$$

I,2.2.2 - Cas de l'observation complète

On observe :

$$z_k = C x_k$$

C étant une matrice carrée de rang n .

Dans ce cas, l'observation permet de déterminer complètement l'état x_k du système.

L'application de la relation (I,7) donne : $l = 1$

D'où :

$$\begin{cases} z_{k+1} = D z_k + E u_k \\ z_k = y_k \end{cases}$$

Comme la matrice F , D est dans ce cas caractérisée par n^2 éléments.

Le changement de variable $y = M x_k = C x_k$ consiste simplement à prendre comme nouveau vecteur d'état le vecteur observation z_k .

I,2.2.3 - Cas de l'observation scalaire

On observe ici $z_k = C x_k$, z_k étant un scalaire ($p=1$). On a donc $l = n$ et les équations (I,6) et (I,7) s'écrivent :

$$\begin{cases} y_{k+1} = D y_k + E u_k \\ z_k = [1, 0, \dots, 0] y_k \end{cases}$$

avec :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \\ d^1 & d^2 & \dots & & d^n \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \vdots \\ e^n \end{bmatrix}$$

les d^i et les e^i étant des scalaires.

L'équation (I,7) devient une équation récurrente scalaire :

(I,8)

$$y_{k+n} = d^1 z_k + \dots + d^n z_{k+n-1} + e^1 u_{k+n-1} + (e^2 - d^n e^1) u_{k+n-2} + \dots + (e^{n-1} - d^n e^{n-2} - \dots - d^{n-1} e^1) u_{k+1} + (e^n - d^n e^{n-1} - \dots - d^2 e^1) u_k$$

En posant :

$$\begin{cases} \gamma^1 = d^1 \\ \gamma^2 = d^2 \\ \dots \\ \gamma^n = d^n \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma^{n+1} = e^n - d^n e^{n-1} - \dots - d^2 e^1 \\ \dots \\ \gamma^{2n-1} = e^2 - d^n e^1 \\ \gamma^{2n} = e^1 \end{cases}$$

Cette équation s'écrit :

(I,9)

$$y_{k+n} = \gamma^1 z_k + \dots + \gamma^n z_{k+n-1} + \gamma^{n+1} u_{k+1} + \dots + \gamma^{2n} u_{k+n-1}$$

On retrouve sous cette forme l'équation récurrente classiquement obtenue par la méthode de la transformation en Z lorsque l'observation s'écrit $z_k = A_k$, A_k étant la sortie échantillonnée du système.

I,2.3 - Conclusion sur les équations discrètes

A l'équation continue (I,2) correspondent trois expressions discrètes équivalentes représentées par les équations (I,5), (I,6) et (I,7).

L'équation (I,5) a l'avantage de conserver le même vecteur d'état que le système continu (I,2) et permet par conséquent de décrire complètement son état.

L'équation (I,6) simplifie la forme de la matrice d'évolution D et relie directement certaines composantes de l'état y_k à l'observation z_k . L'équation (I,7), qui n'est qu'une représentation récurrente de l'équation d'état (I,6), est une relation linéaire entre les grandeurs mesurables du système (l'observation z_k et l'entrée u_k) et ses paramètres caractéristiques.

Suivant que l'on traite l'identification ou la commande du système, une de ces formes sera utilisée de préférence à une autre lorsqu'elle se trouvera commode pour résoudre le problème.

I,3 - Exemple

I,3.1 - Equation continue

L'exemple d'un système du second ordre à coefficients variables considéré dans cette étude correspond à l'équation simplifiée de l'évolution en tangage d'une fusée-sonde de l'O.N.E.R.A. (Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales). La durée de vol prise est égale à 20 secondes et correspond à la combustion du premier étage. La mise en équation est effectuée en Annexe.

L'équation continue simplifiée s'écrit :

(I,10)

$$\ddot{\theta}(t) + b(t) \dot{\theta}(t) + a(t) \theta(t) = d(t) u(t)$$

où θ est l'assiette angulaire exprimée en radians, $u(t)$ est l'angle de braquage des tuyères de pilotage de la fusée.

Les courbes d'évolution des paramètres a, b, c en fonction du temps sont tracées dans les figures I,1 et I,2.

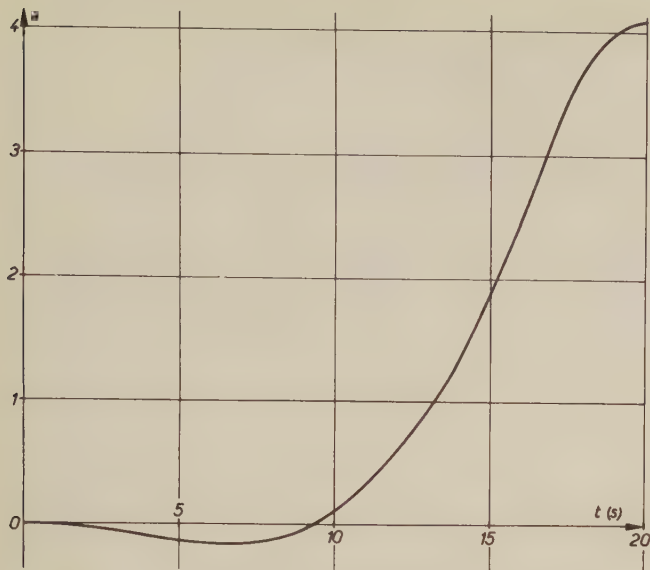


Figure I,1 - Caractéristiques de la fusée
Evolution du coefficient a

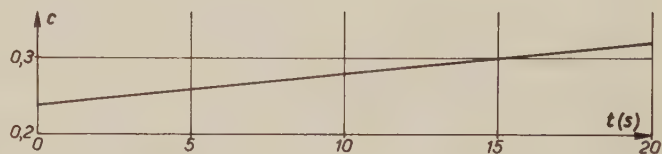
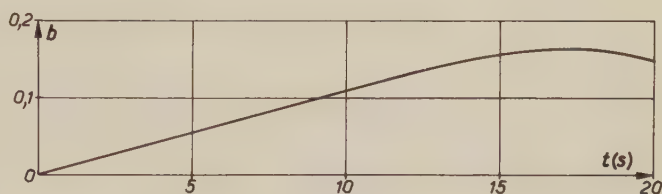


Figure I,2 - Caractéristiques de la fusée
Evolution des coefficients b, c

La fusée non commandée est aérodynamiquement instable au départ.

L'observation disponible est l'assiette angulaire θ .

L'équation différentielle matricielle équivalente est :

$$(I,11) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ z = [1, 0] x \end{cases}$$

avec :

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}.$$

I,3.2 - Equations discrètes d'un système stationnaire

En supposant les coefficients a, b, c constants, l'intégration littérale du système (I,11) est possible, elle est effectuée en Annexe 5.

Ecrivons les différentes formes discrètes qui seront utilisées dans les chapitres suivants :

- équation d'état discrète :

$$(I,12) \quad \begin{cases} x_{k+1} = F x_k + G u_k \\ z_k = [1, 0] x_k \end{cases} \quad \text{avec} \quad F = \begin{bmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g^1 \\ g^2 \end{bmatrix},$$

les expressions de f^{ij} et g^i en fonction des coefficients a, b, c de l'équation continue (I,11) sont explicitées en Annexe 5 ;

- équation discrète modifiée :

$$(I,13) \quad \begin{cases} y_{k+1} = D y_k + E u_k \\ z_k = [1, 0] y_k \end{cases} \quad \text{avec} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ d^1 & d^2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \end{bmatrix};$$

- équation récurrente :

$$(I,14) \quad \theta_{k+2} = \gamma^1 \theta_k + \gamma^2 \theta_{k+1} + \gamma^3 u_k + \gamma^4 u_{k+1}$$

Les coefficients $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$ de l'équation récurrente (I,14) sont liés aux éléments des

matrices F, G, D, E, A et B par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^1 = d^1 = f^{12} f^{21} - f^{14} f^{12} = -e^{-bT} \\ \gamma^2 = d^2 = f^{11} + f^{22} = 2 e^{-bT/2} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{b^2-4a}}{2} T \\ \gamma^3 = e^2 - d^2 e^1 = f^{12} g^2 - f^{22} g^1 = \frac{c}{a} e^{-bT/2} \left[e^{-bT/2} - \left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{b^2-4a}}{2} T - \frac{b}{\sqrt{b^2-4a}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b^2-4a}}{2} T \right) \right] \\ \gamma^4 = e^1 = g^1 = \frac{c}{a} \left[1 - e^{-bT/2} \left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{b^2-4a}}{2} T + \frac{b}{\sqrt{b^2-4a}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b^2-4a}}{2} T \right) \right] \end{array} \right.$$

(le calcul est développé en Annexe 5).

En effectuant un développement limité au premier ordre en aT, bT, cT de ces quantités, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^1 \simeq -1 + bT \\ \gamma^2 \simeq 2 - bT - aT^2 \\ \gamma^3 \simeq \frac{cT^2}{2} \\ \gamma^4 \simeq \frac{cT^2}{2} \end{array} \right.$$

Ces dernières relations seront utilisées dans l'exemple du chapitre suivant (identification au premier ordre).

2

II - IDENTIFICATION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Dans le but d'étudier l'auto-adaptation numérique d'un système linéaire, l'identification numérique est traitée dans ce chapitre sous les aspects suivants :

- le système dynamique continu à identifier est déterministe, sa structure est supposée connue ;
- l'identification est effectuée pendant l'évolution du système soumis à un signal d'entrée "étagé", c'est-à-dire constant entre les instants d'échantillonnage ;
- l'état du système est incomplètement observé (on observe seulement certaines combinaisons linéaires des composantes de l'état, mais on néglige, par contre, le bruit inhérent à tout appareil de mesure).

Les paramètres d'un système stationnaire sont identifiés par la méthode classique des moindres carrés. La méthode est ensuite appliquée à l'identification d'un système non stationnaire. Enfin, dans la dernière partie, les résultats numériques correspondant à un exemple d'un système du second ordre sont présentés.

II,1 - Cas d'un système stationnaire

II,1.1 - Définition du problème - choix du modèle

Rappelons l'équation linéaire d'ordre n traitée dans cette étude :

$$s^{(n)} + a_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{s} + a_0 s = b_0 u$$

Cette équation s'écrit, sous la forme matricielle :

(II,1)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}$$

Considérons d'abord le cas d'une observation scalaire :

(II,2)

$$y = Cx$$

où y est un scalaire, C une matrice ligne $1 \times n$.

L'ordre du système étant connu, il s'agit d'identifier ses paramètres caractéristiques au moyen d'un calculateur numérique. Etant donné la nature séquentielle des opérations effectuées par ce dernier, nous considérons comme modèle du système à identifier, l'équation récurrente d'ordre n correspondant à l'équation différentielle continue : (d'après § I,2.2)

(II,3)

$$y_{k+n} = \gamma^1 y_k + \gamma^1 y_{k+1} + \dots + \gamma^n y_{k+n-1} + \gamma^{n+1} u_k + \dots + \gamma^{2n} u_{k+n-1}$$

la commande u étant choisie constante entre les instants d'échantillonnage de période T .

L'identification peut se ramener à la détermination des $2n$ paramètres $\gamma^1, \gamma^1, \dots, \gamma^{2n}$ de cette équation.

Indiquons brièvement comment on peut déduire des valeurs de ces paramètres, outre les valeurs des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0$ de l'équation continue (II,1), les valeurs des matrices intervenant dans les différentes expressions discrètes du système linéaire. On verra (chapitre IV) que ces calculs seront en principe utiles pour calculer la commande du système.

On peut procéder de la façon suivante :

1°) - Calcul de $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0$

On décompose, par exemple, la fonction de transfert en $\mathcal{Z}$ de l'équation (II,3) en une somme de fractions rationnelles simples. On en déduit la fonction de transfert de Laplace correspondante (en utilisant les tables de conversion existant pour les fractions simples), d'où les valeurs de $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0$ qui sont les valeurs des coefficients de la fonction de transfert de Laplace du système ;

2°) - Calcul des matrices F, G de l'équation : $x_{k+1} = F x_k + G u_k$

Les matrices F et G peuvent être calculées à partir des coefficients $a_0, a_1, \dots, b_0$ (calculés par la méthode indiquée en 1°) par les relations suivantes : (chapitre I, § I,2)

$$F = e^{AT} = I + AT + \dots + \frac{A^i T^i}{i!} + \dots$$

$$G = A^{-1} [e^{AT} - I] B = BT + \dots + \frac{A^{i-1} B T^i}{i!} + \dots$$

Le calcul de ces matrices à partir des valeurs identifiées de $\gamma^1, \dots, \gamma^{2n}$, qu'on peut prévoir long et compliqué, est en principe nécessaire pour déterminer la commande optimale du système.

Remarquons qu'il peut être rendu simple lorsque la période d'échantillonnage T est faible et si l'on se contente d'une expression approchée de ces matrices.

Les coefficients $\gamma^1, \dots, \gamma^{2n}$ de l'équation (II,3) sont de la forme :

$$\gamma^i = \gamma^i(a_0 T, a_1 T, \dots, b_0 T, T) \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

et en se limitant au premier ordre en $a_0 T, a_1 T, \dots, b_0 T$, ils s'expriment linéairement en fonction de $a_0, a_1, \dots, b_0$, le calcul de ces derniers se trouve alors notablement simplifié ;

3°) - Calcul des matrices D et E

On a vu au chapitre précédent qu'avec un changement de base de l'espace d'état, on obtient une équation d'état discrète :

$$y_{k+1} = D y_k + E u_k$$

$$z_k = [1, 0, \dots, 0] y_k$$

avec :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ d^1 & d^2 & \dots & d^n \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \vdots \\ e^n \end{bmatrix}$$

les éléments des matrices D et E peuvent être calculés directement à partir des paramètres $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{2n}$ par les relations suivantes (chapitre I, § I,2.2) :

$$(II,4) \quad \left\{ \begin{array}{l} d^1 = \gamma^1 \\ \dots \\ d^n = \gamma^n \\ e^1 = \gamma^{2n} \\ e^2 = \gamma^{2n-1} + d^n e^1 \\ \dots \\ e^n = \gamma^{n+1} + d^n e^{n-1} + \dots + d^2 e^1 \end{array} \right.$$

II,1.2 - Critère d'identification

Le modèle du système à identifier étant l'équation récurrente (II,3), il s'agit donc de déterminer les valeurs des coefficients $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{2n}$.

Exprimons d'abord l'équation (II,3) sous une forme vectorielle qui permet de simplifier l'écriture du critère d'identification.

Posons :

$\gamma_s^T = [\gamma_s^1, \gamma_s^2, \dots, \gamma_s^{2n}]$: vecteur des paramètres réels du système

$\gamma_I^T = [\gamma_I^1, \gamma_I^2, \dots, \gamma_I^{2n}]$: vecteur des paramètres identifiés

$w_{k+n-1}^T = [\gamma_k, \dots, \gamma_{k+n-1}, \mu_k, \dots, \mu_{k+n-1}]$: vecteur d'éléments connus

Avec ces notations, l'équation d'évolution du système s'écrit :

$$\gamma_{k+n} = w_{k+n-1}^T \gamma_s$$

Un nombre h d'équations successives de ce type s'écrit, sous forme vectorielle :

(II,5)

$$\zeta_h = \Omega_{h-1} \gamma_s$$

avec :

$$\zeta_h = \begin{bmatrix} \gamma_{h-2+1} \\ \gamma_{h-2+2} \\ \dots \\ \gamma_h \end{bmatrix}, \quad \Omega_{h-1} = \begin{bmatrix} w_{h-2}^T \\ w_{h-2+1}^T \\ \dots \\ w_{h-1}^T \end{bmatrix}.$$

Pour connaître la matrice Ω_{h-1} et le vecteur ζ_h , il suffit d'observer le système (sortie γ_k et entrée μ_k) de l'instant $(h-2-n+1)T$ à l'instant $(h)T$ (la durée de l'observation est égale à $(n+1)T$).

En considérant $h=2n$ la matrice Ω_{h-1} est carrée, et si elle est inversible, l'équation (II,5) constitue alors un système de Cramer en γ_s qu'on résout en inversant la matrice Ω_{h-1} .

Cependant, pour tenir compte des erreurs inhérentes aux valeurs mesurées de γ_k et au calcul numérique, on considère un nombre d'équations h supérieur à la dimension $2n$ du paramètre γ . Le système (II,5) constitue alors un système d'équations linéaires surabondantes en γ que l'on résout en minimisant le critère suivant :

(II,6)

$$\mathcal{E}(\gamma) = \|\zeta_h - \Omega_{h-1} \gamma\|^2 = (\zeta_h - \Omega_{h-1} \gamma)^T (\zeta_h - \Omega_{h-1} \gamma)$$

la notation $\|x\| = (x^T x)^{1/2}$ représente la norme euclidienne de x .

Ce critère s'écrit encore, si l'on tient compte de la relation (II,5) :

$$\mathcal{E}(\gamma) = \|\Omega_{h-1} (\gamma_s - \gamma)\|^2 = (\gamma_s - \gamma)^T \Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} (\gamma_s - \gamma)$$

Sous cette dernière forme, on remarque que minimiser $\mathcal{E}$ revient à déterminer le minimum d'une forme quadratique de l'erreur $(\gamma_s - \gamma)$.

II,1.3 - Minimisation du critère d'identification

Supposons d'abord que l'instant hT soit assez grand pour que l'on dispose d'un nombre suffisant d'informations sur le système à identifier, c'est-à-dire que l'on a pu effectuer au moins $(n+2)$ mesures ($h \geq 2n$) de la "sortie" γ_k et $(n+1)$ mesures de "l'entrée" μ_k (on verra au § II,1.4 comment procéder dans le cas contraire). Les éléments de ζ_h et de Ω_{h-1} de la relation (II,5) sont alors complètement connus.

La détermination de γ par la minimisation du critère quadratique $\mathcal{E}$ est connue sous le nom de méthode des moindres carrés, elle consiste à résoudre le système suivant en γ_I :

(II,7)

$$\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \gamma_I = \Omega_{h-1}^T \zeta_h$$

Un rappel des résultats concernant la minimisation du critère $\mathcal{E}$ est effectué en Annexe II.

Lorsque la matrice $\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1}$ est inversible, la valeur identifiée γ_I est donnée par la relation :

(II,8)

$$\gamma_I = \left[\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \right]^{-1} \Omega_{h-1}^T \gamma_h$$

Dans la suite on supposera $\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1}$ inversible, l'identification du système (II,3) est donc réalisée en une seule étape par le calcul de la relation (II,8).

Remarques :

1°) - On peut vérifier (en l'absence d'erreurs de mesure ou d'erreurs dues au calcul numérique) que la valeur de γ_I ainsi identifiée est égale au vecteur γ_S des paramètres réels du système. En effet, en portant dans l'expression (II,8) l'expression de γ_h déduite de (II,5), on obtient :

$$\gamma_I = \left[\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \right]^{-1} \Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \gamma_S = \gamma_S$$

2°) - Donnons ici une condition qui, si elle est vérifiée par la commande, rend la matrice $\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1}$ singulière.

La matrice Ω_{h-1} s'écrit :

$$\Omega_{h-1} = \begin{bmatrix} z_{h-2-n+1}, \dots, z_{h-2}, u_{h-2-n+1}, \dots, u_{h-2} \\ z_{h-2-n+2}, \dots, z_{h-2+1}, u_{h-2-n+2}, \dots, u_{h-2+1} \\ \dots \dots \dots \\ z_{h-n}, \dots, z_{h-1}, u_{h-n}, \dots, u_{h-1} \end{bmatrix}$$

On a la propriété suivante [7] :

Pour que la matrice $\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1}$ soit inversible, il faut et il suffit que les $2n$ vecteurs colonnes de Ω_{h-1} soient linéairement indépendants.

En particulier, lorsque la commande u_i est une constante, ou une combinaison linéaire du type :

$$u_i = \alpha^1 z_i + \alpha^2 z_{i-1} + \dots + \alpha^n z_{i-n+1} + \alpha^{n+1} u_{i-1} + \dots + \alpha^{2n-1} u_{i-n+1}$$

où $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{2n-1}$ sont des constantes, alors la matrice $\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1}$ est singulière.

3°) - Notons enfin que si la relation (II,8) n'est pas applicable car $\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1}$ n'est pas inversible, on pourrait calculer la valeur de γ_I en résolvant l'équation (II,7) par la technique des matrices pseudo-inverses [22].

II,1.4 - Initialisation de l'identification

Au paragraphe précédent, l'identification est réalisée lorsqu'on dispose de $(n+r)$ points de mesures, r étant supérieur ou égal à $2n$, ce qui correspond à une durée d'observation au moins égale à $(3n-1)T$.

Dans le problème d'adaptation de la commande il est intéressant de pouvoir se donner une "idée" des valeurs du paramètre γ avant d'avoir effectué au moins $3n$ observations du système, on pourra ainsi calculer une commande adaptée à ces valeurs approchées de γ .

Une méthode d'initialisation proposée ci-dessous permet de calculer approximativement les éléments de γ_I , celui-ci devenant égal à γ_S lorsque le nombre d'équation r de l'expression (II,5) est égal à $2n$, dimension de γ .

Supposons que le système évolue à partir de l'instant initial 0, on observe successivement $z_0, z_1, \dots, z_h$. Soit γ_{I_0} une valeur estimée a priori de γ_S .

Soit l'équation vectorielle (II,5) modifiée :

$$(II,9) \quad \mathcal{Z}_h^n = \Omega_{h-1}^{n-1} \gamma$$

avec :

$$\mathcal{Z}_h^n = \begin{bmatrix} z_n \\ z_{n+1} \\ \dots \\ z_h \end{bmatrix} \quad \Omega_{h-1}^{n-1} = \begin{bmatrix} \omega_{h-1}^T \\ \omega_n^T \\ \dots \\ \omega_{h-1}^T \end{bmatrix}$$

$\mathcal{Z}_h^n$ étant un vecteur de dimension variable $h-n+1$,

Ω_{h-1}^{n-1} une matrice de dimension variable $(h-n+1) \times 2n$.

L'initialisation est effectuée suivant la dimension $(h-n+1)$ du vecteur $\mathcal{Z}_h^n$ qui augmente d'une unité à chaque instant d'échantillonnage avec l'arrivée d'une nouvelle mesure de z_h . Elle se compose de trois étapes :

1°) - On dispose de moins de $(n+1)$ observations ($h < n$)

A l'instant h^T on a observé $z_0, z_1, \dots, z_h$, h étant inférieur à n . Les éléments de la première ligne de Ω_{h-1}^{n-1} et de $\mathcal{Z}_h^n$ ne sont donc pas encore complètement connus. On conserve pour γ_{I_h} , valeur identifiée de γ à l'instant h^T , sa valeur initiale γ_{I_0} , soit :

$$\gamma_{I_h} = \gamma_{I_0} \quad h = 1, 2, \dots, n-1$$

2°) - On dispose de h observations, avec $n \leq h \leq 3n-1$

Le rang $(h-n+1)$ de la matrice Ω_{h-1}^{n-1} est inférieur à la dimension $2n$ du vecteur paramètre γ .

Le système (II,9) comporte moins d'équations que d'inconnues, on considère une condition supplémentaire sur $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{2n}$ qui permet d'établir un algorithme d'initialisation :

le vecteur γ_{I_h} , à l'instant h^T , doit à la fois satisfaire le système d'équation (II,9) et minimiser la quantité $\|\gamma_{I_h} - \gamma_{I_{h-1}}\|^2$, la condition initiale étant $\gamma_{I_{h-1}} = \gamma_{I_0}$.

D'après les résultats du calcul des variations [3], ceci revient à minimiser la fonction :

$$\varphi(\gamma_{I_h}) = \|\gamma_{I_h} - \gamma_{I_{h-1}}\|^2 + \lambda^T (\mathcal{Z}_h^n - \Omega_{h-1}^{n-1} \gamma_{I_h})$$

avec la contrainte $\mathcal{Z}_h^n = \Omega_{h-1}^{n-1} \gamma_{I_h}$, λ étant le vecteur des variables de Lagrange de dimension $(h-n+1)$.

La solution de γ_{I_h} s'obtient en résolvant le système linéaire en γ_{I_h} et en λ suivant :

$$\frac{d\varphi}{d\gamma_{I_h}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_h^n = \Omega_{h-1}^{n-1} \gamma_{I_h}$$

On a :

$$\frac{d\varphi}{d\gamma_{I_h}} = 2(\gamma_{I_h} - \gamma_{I_{h-1}}) + \Omega_{h-1}^{n-1T} \lambda = 0$$

d'où :

$$\gamma_{I_h} = \gamma_{I_{h-1}} - \frac{1}{2} \Omega_{h-1}^{n-1T} \lambda$$

En portant cette expression dans (II,9), on en tire λ :

$$\mathcal{J}_h^n = \Omega_{h-1}^{n-1} \left[\gamma_{I_{h-1}} - \frac{1}{2} \Omega_{h-1}^{n-1 T} \lambda \right]$$

soit :

$$\lambda = 2 \left[\Omega_{h-1}^{n-1} \Omega_{h-1}^{n-1 T} \right]^{-1} \left[\Omega_{h-1}^{n-1} \gamma_{I_{h-1}} - \mathcal{J}_h^n \right]$$

D'où l'algorithme d'initialisation de γ_{I_h} :

(II,10)

$$\gamma_{I_h} = \gamma_{I_{h-1}} - \Omega_{h-1}^{n-1 T} \left[\Omega_{h-1}^{n-1} \Omega_{h-1}^{n-1 T} \right]^{-1} \left[\Omega_{h-1}^{n-1} \gamma_{I_{h-1}} - \mathcal{J}_{h-1}^n \right]$$

avec $n \leq h \leq 3n-1$ et $\gamma_{I_{n-1}} = \gamma_{I_0}$

(on peut vérifier que la solution obtenue correspond bien au minimum de la fonction $\varphi(\gamma_{I_h})$;

3°) - On dispose de plus de $(3n-1)$ observations

Le système linéaire (II,9) est surabondant, le nombre d'équations $(h-n+1)$ étant supérieur à la dimension de γ . γ_I est calculé par la relation (II,8) valable pour $h \geq 2n$ établie au paragraphe précédent.

Remarques :

1°) - Pour un système déterministe la phase d'initialisation se termine lorsqu'on dispose de $3n$ observations, le système (II,9) devenant alors un système de Cramer (la matrice carrée Ω_{3n-2}^{n-1} étant supposée inversible).

2°) - Vérifions que, pour $h=3n-1$, le vecteur γ_{I_h} obtenu par la relation d'initialisation (II,10) est identique au vecteur γ_s des paramètres réels du système.

En effet, la matrice $\Omega_{h-1}^{n-1} = \Omega_{3n-2}^{n-1}$ est alors carrée et l'équation (II,11) se simplifie :

$$\gamma_{I_{3n-1}} = \gamma_{I_{3n-2}} - \Omega_{3n-2}^{n-1 T} \left[\Omega_{3n-2}^{n-1} \right]^{-1} \left[\Omega_{3n-2}^{n-1} \right]^{-1} \left[\Omega_{3n-2}^{n-1} \gamma_{I_{3n-2}} - \mathcal{J}_{3n-2}^n \right]$$

et on obtient :

$$\gamma_{I_{3n-1}} = \left[\Omega_{3n-2}^{n-1} \right]^{-1} \mathcal{J}_{3n-2}^n = \gamma_s$$

Interprétation géométrique de la relation d'initialisation (II,10)

Soient les hyperplans $P_n = \mathcal{Z}_n - \omega_n^T \gamma = 0$, $P_{n+1} = \mathcal{Z}_{n+1} - \omega_{n+1}^T \gamma = 0$, ... $P_h = \mathcal{Z}_h - \omega_h^T \gamma = 0$ dans l'espace paramétrique γ orthonormé.

γ_{I_n} vérifie l'équation $\mathcal{Z}_n - \omega_n^T \gamma = 0$ et minimise $\|\gamma_{I_n} - \gamma_{I_{n-1}}\|^2$, γ_{I_n} est donc la projection orthogonale de $\gamma_{I_{n-1}}$ sur l'hyperplan P_n .

De même $\gamma_{I_{n+1}}$ vérifie $\mathcal{Z}_n - \omega_n^T \gamma = 0$, $\mathcal{Z}_{n+1} - \omega_{n+1}^T \gamma = 0$ et minimise $\|\gamma_{I_{n+1}} - \gamma_{I_n}\|^2$, $\gamma_{I_{n+1}}$ est la projection orthogonale de γ_{I_n} sur la variété linéaire définie par $P_n = 0$, $P_{n+1} = 0$ de dimension $2n-2$.

γ_{I_h} est donc la projection orthogonale du point $\gamma_{I_{h-1}}$ de l'espace paramétrique sur la variété linéaire définie par les hyperplans $P_n = 0$, $P_{n+1} = 0$, ..., $P_h = 0$ de dimension $(3n-h+1)$

On vérifie que, pour $h=3n-1$, la variété définie par $P_n = 0$, ..., $P_{3n-1} = 0$ est de dimension nulle. C'est le point γ_I obtenu par la résolution du système linéaire de Cramer (II,9). La figure (II,1) schématise l'initialisation dans un espace à 3 dimensions.

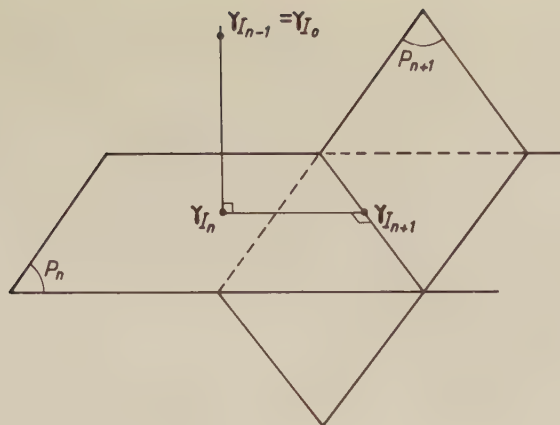


FIGURE II,1 - Interprétation géométrique de l'initialisation

II,1.5 - Généralisation : Identification d'un système à observation non scalaire

II,1.5.1 - Généralités

Quand on dispose d'une observation z_k vectorielle on peut penser d'abord à effectuer une identification paramétrique par la méthode précédente en conservant pour chaque observation z_k une seule de ses composantes, ramenant ainsi le problème à celui de l'observation scalaire.

Cependant, lorsque l'on observe, par exemple, complètement l'état x_k du système décrit par l'équation $x_{k+1} = F x_k + G u_k$, il est possible d'identifier directement les éléments des matrices F et G en augmentant la dimension du vecteur paramètre à identifier. Ceci évite de longs calculs que l'on aura à effectuer pour déterminer les éléments de ces matrices à partir des paramètres identifiés de l'équation récurrente scalaire, obtenus en utilisant la méthode indiquée.

Rappelons que les matrices F et G sont en principe utiles pour le calcul de la commande numérique du système, comme nous le verrons au chapitre suivant.

La méthode d'identification ci-dessus se généralise sans difficulté au cas de l'observation vectorielle $z_k = C x_k$, lorsque la dimension n de l'état x_k est un multiple entier de la dimension p de l'observation z_k .

Un formalisme général est d'abord établi, on l'applique ensuite au cas particulier de l'observation complète $z_k = x_k$.

II,1.5.2 - Cas général

Il s'agit d'identifier ici les éléments des matrices D et E de l'équation d'état discrète (modifiée par un changement de base) :

(II,11)

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= D y_k + E u_k \\ z_k &= [I^p, 0, \dots, 0] y_k \end{aligned}$$

Les notations étant définies au paragraphe I,2.2.:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & I^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I^p & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ D^1 & D^2 & \dots & & D^l \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \vdots \\ e^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^1 \\ E^2 \\ \vdots \\ E^l \end{bmatrix}, \quad E^i = \begin{bmatrix} e^{ip-p+1} \\ e^{ip-p+2} \\ \vdots \\ e^{ip} \end{bmatrix}$$

z_k : vecteur observation de dimension p

y_k : vecteur état de dimension n

l est le nombre entier quotient de n par p .

L'équation récurrente équivalente à l'équation (II,11) s'écrit :

(II,12)

$$\begin{aligned} z_{k+l} = & D^1 z_k + D^2 z_{k+1} + \dots + D^l z_{k+l-1} + E^1 u_{k+l-1} + \dots \\ & + \dots + (E^l - D^l E^{l-1} - \dots - D^2 E^1) u_k \end{aligned}$$

Cette équation est une expression généralisée de l'équation récurrente (II,3), et est utilisée comme modèle du système dynamique réel continu à identifier.

Considérons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} D^1 &= [\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^p] & ; & \delta^{n+1} = E^l - D^l E^{l-1} - \dots - D^2 E^1 \\ \dots & & & \dots \\ D^l &= [\delta^{n-p+1}, \delta^{n-p+2}, \dots, \delta^n] & ; & \delta^{n+l} = E^1 \\ \Gamma &= [\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^{n+l}] = \begin{bmatrix} \Gamma^{1T} \\ \Gamma^{2T} \\ \vdots \\ \Gamma^{pT} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Γ est la matrice des éléments caractéristiques du système représenté par l'équation récurrente (II,12), ayant pour vecteurs colonnes $\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^{n+l}$ de dimension (p) , et pour vecteurs lignes $\Gamma^{1T}, \Gamma^{2T}, \dots, \Gamma^{pT}$ de dimension $(n+l)$

Posons, d'autre part :

$$w_i^T = [\zeta_{i-l+1}^T, \zeta_{i-l+2}^T, \dots, \zeta_i^T, u_{i-l+1}, \dots, u_i]$$

L'équation (II,12) devient :

$$z_{k+l} = \Gamma w_{k+l-1}$$

Les relations suivantes (II,13) analogues aux relations (II,4) permettent de calculer les éléments $D^1, D^2, \dots, D^l, E^1, E^2, \dots, E^l$ des matrices D et E de l'équation discrète (II,11) à partir des éléments de la matrice Γ :

(II,13)

$$\left\{ \begin{aligned} D^1 &= [\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^p] \\ D^2 &= [\delta^{p+1}, \delta^{p+2}, \dots, \delta^{2p}] \\ \dots & \\ D^l &= [\delta^{n-p+1}, \delta^{n-p+2}, \dots, \delta^n] \\ E^1 &= \delta^{n+l} \\ E^2 &= \delta^{n+l-1} + D^l E^1 \\ \dots & \\ E^l &= \delta^{n+1} + D^l E^{l-1} + \dots + D^2 E^1 \end{aligned} \right.$$

L'identification paramétrique consiste à déterminer les valeurs des éléments de la matrice Γ .

Comme pour le cas de l'observation scalaire, exprimons les relations liant Γ aux obser-

vations successives sous la forme d'un système d'équations linéaires, ce qui permet d'identifier ses éléments par la méthode de la minimisation quadratique.

En désignant par Γ_s la matrice des paramètres exacts, Γ_I la matrice des paramètres identifiés, écrivons n équations vectorielles successives du type (II,12) sous la forme matricielle suivante :

$$(II,14) \quad \boxed{Z_h = \Omega_{h-1} \Gamma_s^T}$$

avec :

$$Z_h = \begin{bmatrix} z_{h-1+1}^T \\ z_{h-1+2}^T \\ \vdots \\ z_h^T \end{bmatrix} = [z_h^1, z_h^2, \dots, z_h^p] = \text{matrice } (n \times p)$$

$z_h^1, z_h^2, \dots, z_h^p$ étant les vecteurs colonnes de Z_h

et :

$$\Omega_{h-1} = \begin{bmatrix} \omega_{h-1}^T \\ \omega_{h-2+1}^T \\ \vdots \\ \omega_{h-1}^T \end{bmatrix} = \text{matrice } n \times (n+l)$$

L'équation (II,14) s'écrit encore :

$$[z_h^1, z_h^2, \dots, z_h^p] = \Omega_{h-1} [\Gamma_s^1, \Gamma_s^2, \dots, \Gamma_s^p]$$

soit :

$$(II,15) \quad \begin{cases} z_h^1 = \Omega_{h-1} \Gamma_s^1 \\ z_h^2 = \Omega_{h-1} \Gamma_s^2 \\ \dots \\ z_h^p = \Omega_{h-1} \Gamma_s^p \end{cases}$$

L'équation (II,15) constitue un système linéaire de (np) équations à $(n+l)p$ paramètres γ^{ij} , éléments de la matrice Γ_s .

Pour $n \geq n+l$, considérons le critère analogue au cas de l'observation scalaire : les vecteurs $\Gamma_s^1, \Gamma_s^2, \dots, \Gamma_s^p$ sont déterminés de façon à minimiser l'expression :

$$(II,16) \quad \boxed{\mathcal{E} = \sum_{i=1}^p \|z_h^i - \Omega_{h-1} \Gamma_s^i\|^2}$$

$\mathcal{E}$ est une somme de termes positifs ou nuls indépendants entre eux (dans chaque terme intervient un Γ_s^i différent) ; il suffit de minimiser chacun de ces termes pour rendre $\mathcal{E}$ minimum.

La solution en Γ_s^i se déduit immédiatement de la méthode directe établie pour l'observation scalaire, en supposant la matrice $\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1}$ inversible :

$$\Gamma_s^i = [\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1}]^{-1} \Omega_{h-1}^T z_h^i \quad i = 1, 2, \dots, p$$

soit encore, avec une écriture matricielle :

$$[\Gamma_s^1, \Gamma_s^2, \dots, \Gamma_s^p] = [\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1}]^{-1} [z_h^1, z_h^2, \dots, z_h^p]$$

D'où la valeur identifiée de Γ_I :

$$\Gamma_I^T = \left[\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \right]^{-1} \Omega_{h-1}^T \mathcal{Z}_h$$

ou encore, en transposant cette expression :

$$(II,17) \quad \boxed{\Gamma_I = \mathcal{Z}_h^T \Omega_{h-1} \left[\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \right]^{-1}}$$

L'identification paramétrique des éléments caractéristiques de l'équation récurrente (II,12) nécessite l'inversion d'une matrice carrée de dimension $(n+l) \times (n+l)$, (le nombre entier l étant le quotient de n par p , n et p étant respectivement les dimensions de l'état et de l'observation).

II,1.5.3 - Cas de l'observation complète $z_k = x_k$

Les équations (II,11) à (II,17) deviennent :

$$\begin{cases} x_{k+1} = F x_k + G u_k \\ z_k = x_k \end{cases}$$

$$\Gamma = [F, G]$$

$$\Omega_{h-1} = \begin{bmatrix} x_{h-2}^T, u_{h-2} \\ x_{h-1}^T, u_{h-1} \\ \dots \\ x_{h-1}^T, u_{h-1} \end{bmatrix}$$

La relation (II,17) permettant d'identifier les matrices F et G s'écrit :

$$\boxed{[F, G] = [x_{h-2+1}, x_{h-2+2}, \dots, x_h] \Omega_{h-1} \left[\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \right]^{-1}}$$

On retrouve, pour $h = n+1$, la relation reliant les matrices caractéristiques F et G aux observations successives de l'état et de la commande du système linéaire.

II,1.6 - Conclusion

L'identification d'un système linéaire stationnaire est ramenée, dans cette étude, à la résolution d'un système d'équations linéaires. La méthode classique des moindres carrés est appliquée à l'identification des paramètres caractéristiques du système lorsque les composantes de son vecteur d'état ne sont pas toutes observées, la dimension p du vecteur observation lié à l'état par la relation matricielle $z = Cx$ doit cependant vérifier une condition restrictive (p doit diviser la dimension n du vecteur d'état x).

Cette méthode peut être utilisée au cas où la dimension p de l'observation z est quelconque ; on se ramène au cas étudié en considérant, par exemple, un vecteur observation z' comprenant p' composantes de z , p' étant le plus grand nombre entier inférieur à p qui divise n .

II,2 - Identification approchée d'un système non stationnaire

II,2.1 - Principe de l'identification

On considère uniquement le cas où l'on dispose d'une observation scalaire de l'état du système, la méthode utilisée pouvant se généraliser, comme pour le système stationnaire, au cas d'une observation vectorielle.

Pour un système non stationnaire dont on désire réaliser une auto-adaptation numérique, les coefficients évoluent rapidement au cours du temps.

La méthode des moindres carrés qui a permis d'identifier les paramètres d'un système stationnaire en une itération, une fois achevé le processus d'initialisation, est appliquée au cas d'un système non stationnaire en faisant l'hypothèse suivante : le système à identifier d'équation (II,1) est supposé stationnaire pendant la durée d'observation nécessaire à son identification.

Avec cette hypothèse approximative, on ne peut plus espérer obtenir une identification exacte, même lorsqu'on néglige les erreurs inhérentes au processus physique ou au calcul numérique. On pourra seulement effectuer, à chaque instant, une identification approchée du système.

Durant un certain intervalle de temps, l'équation d'évolution étant supposée celle d'un système stationnaire, l'identification consiste à déterminer les valeurs des coefficients $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{2n}$ de l'équation récurrente :

$$(II,18) \quad z_n = \omega_{n-1}^T \gamma$$

les notations étant celles utilisées au précédent paragraphe (§ II,1).

On peut considérer le même critère quadratique que pour le cas d'un système stationnaire :

$$(II,19) \quad \mathcal{E}_h(\gamma) = \|z_h - \Omega_{h-1} \gamma\|^2 = \sum_{j=h-2}^{h-1} (z_{j+1} - \omega_j^T \gamma)^2$$

où hT est l'instant courant et h est un nombre entier donné.

La valeur du vecteur γ qui minimise le critère $\mathcal{E}_h$ est donnée par l'expression (II,8) et correspond, si l'on néglige le temps de calcul, aux valeurs identifiées des paramètres du système à l'instant courant hT :

$$(II,20) \quad \gamma_{Ih} = \left[\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \right]^{-1} \Omega_{h-1}^T z_h$$

avec :

$$z_h = \begin{bmatrix} z_{h-2+1} \\ z_{h-2+2} \\ \vdots \\ z_h \end{bmatrix}, \quad \Omega_{h-1} = \begin{bmatrix} \omega_{h-2}^T \\ \omega_{h-1}^T \\ \vdots \\ \omega_{h-1}^T \end{bmatrix}$$

Cette relation est vraie pour $h = n+2-1, n+2$, etc ... si le système évolue à partir de l'instant initial 0 ; rappelons que le nombre entier h (donné) doit être supérieur ou égal à $2n$, dimension du vecteur γ .

A l'instant hT où l'entier h est inférieur à $n+2-1$, on utilise la méthode d'initialisation établie au § II,1.4.

Le processus d'identification continu est schématisé par la figure II,2.

Remarque : La durée d'observation utilisée pour l'identification étant de $(n+2-1)T$, le système est donc supposé stationnaire pendant un intervalle de temps égal à $(n+2-1)T$.

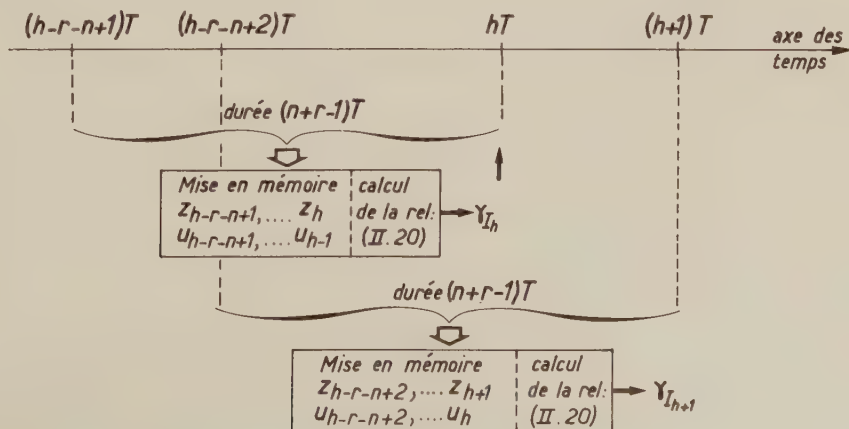


FIGURE II,2 - Schéma de l'identification d'un système non stationnaire

II,2.2 - Identification avec un modèle stationnaire approché

Les méthodes exposées précédemment pour l'identification des systèmes stationnaires ou non conduisent à des calculs assez volumineux.

C'est pourquoi, dans certains cas, on peut développer une méthode du premier ordre, d'autant plus justifiée dans le cas non stationnaire que la méthode déjà exposée conduit alors à des résultats approchés.

Les paramètres $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{2n}$ étant liés aux coefficients $a_0, a_1, \dots, b_0$ de l'équation continue (II,1) par des relations de la forme :

$$\gamma^i = \gamma^i(a_0 T, a_1 T, \dots, a_{n-1} T, b_0 T, T)$$

en se limitant au premier ordre en $a_0 T, a_1 T, \dots, b_0 T$, on obtient :

$$(II,21) \quad \gamma^i \approx \gamma^i(0, 0, \dots, 0, T) + \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{\partial \gamma^i}{\partial (a_j T)} \right]_0 a_j T + \left[\frac{\partial \gamma^i}{\partial (b_0 T)} \right]_0 b_0 T$$

$\left[\frac{\partial \gamma^i}{\partial (\cdot)} \right]_0$ étant calculé pour $a_0 T = \dots = b_0 T = 0$

L'équation récurrente (II,18) qui constitue l'équation du système à identifier, étant linéaire en γ , devient alors une relation linéaire en $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0$ de la forme :

$$(II,22) \quad n_{k+n} = \mu_{k+n-1}^1 a_0 + \dots + \mu_{k+n-1}^n a_{n-1} + \mu_{k+n-1}^{n+1} b_0$$

où n_{k+n} et μ_{k+n-1}^i sont des fonctions linéaires des observations $z_k, z_{k+1}, \dots, z_{k+n}$.

soit encore, sous forme vectorielle :

$$n_{k+n} = \mu_{k+n-1}^T p$$

avec :

$$p^T = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0]$$

$$\mu_{k+n-1}^T = [\mu_{k+n-1}^1, \mu_{k+n-1}^2, \dots, \mu_{k+n-1}^{n+1}]$$

L'identification paramétrique consiste alors à déterminer les valeurs des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0$ de l'équation (II,22). On aboutit à la résolution d'un système linéaire surabondant, mais où le nombre d'inconnues est restreint (ce sont les $n+1$ coefficients $a_0, a_1, \dots, b_0$, au lieu des $2n$ coefficients $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{2n}$) et on peut appliquer la méthode des moindres carrés déjà exposée au § II,1.

Il suffit de résoudre le système suivant :

$$v_h = M_{h-1} p$$

avec :

$$v_h = \begin{bmatrix} n_{h-2+1} \\ n_{h-1+2} \\ \dots \\ n_h \end{bmatrix}, \quad M_{h-1}^T = \begin{bmatrix} \mu_{h-2}^T \\ \mu_{h-1}^T \\ \dots \\ \mu_{h-1}^T \end{bmatrix}$$

La méthode des moindres carrés donne le résultat suivant :

$$(II,23) \quad p_1 = [M_{h-1}^T M_{h-1}]^{-1} M_{h-1}^T v_h$$

L'étude approchée permet de n'inverser qu'une matrice de dimension $(n+1) \times (n+1)$ alors que l'identification paramétrique de γ nécessite l'inversion d'une matrice $(2n) \times (2n)$.

Remarquons que le fait d'identifier directement les coefficients $a_0, a_1, \dots, b_0$ permet de simplifier le calcul des matrices caractéristiques F et G qui sont utiles pour déterminer la commande du système (§ II,1.1 et chapitre IV).

II,2.3 - Normalisation du critère d'identification

Pour l'identification paramétrique d'un système non stationnaire où le résultat obtenu n'est qu'approché, on peut être intéressé par la valeur numérique du critère $\mathcal{E}_k$ (relation II,19) qui permet de caractériser l'erreur de l'identification.

Cependant cette valeur dépend non seulement des valeurs de y^i , mais aussi des grandeurs absolues de l'entrée u_k et de la sortie y_k du système. Cet inconvénient peut être pallié en considérant un critère normalisé obtenu en rendant unitaires les vecteurs lignes de la matrice Ω intervenant dans l'équation d'identification. Le critère s'écrit alors :

$$\mathcal{E}'(y) = \|\tilde{y}'_k - \Omega'_{k-1} y\|^2$$

avec :

$$\tilde{y}'_k = \begin{bmatrix} y'_{k-2+1} \\ y'_{k-2+2} \\ \dots \\ y'_k \end{bmatrix} \quad \Omega'_{k-1} = \begin{bmatrix} \omega'^T_{k-2} \\ \omega'^T_{k-1} \\ \dots \\ \omega'^T_{k-1} \end{bmatrix}$$

et :

$$y'_i = \frac{y_i}{\|\omega_{i-1}\|}, \quad \omega'_{i-1} = \frac{\omega_{i-1}}{\|\omega_{i-1}\|}$$

La valeur de $\mathcal{E}'(y)$ fait apparaître les grandeurs relatives et non absolues de l'entrée et de la "sortie" et permet, par conséquent, de mieux caractériser l'erreur de l'identification paramétrique.

La minimisation de $\mathcal{E}'(y)$ s'effectue comme pour celle de $\mathcal{E}(y)$, il suffit de remplacer, dans la relation donnant y_1 (II,20), les quantités $\tilde{y}_k$ et Ω_{k-1} par les quantités "normalisées" correspondantes $\tilde{y}'_k$ et Ω'_{k-1} .

Remarque :

L'utilisation du critère normalisé peut également s'appliquer à l'identification des coefficients $a_0, a_1, \dots, b_0$ par un modèle stationnaire approché. Il suffit de rendre unitaires les vecteurs lignes de la matrice M de l'équation (II,23) avant d'effectuer le calcul d'identification.

II,3 - Exemple

II,3.1 - Données de la simulation numérique

La méthode étudiée précédemment est appliquée à l'identification des coefficients d'un système de second ordre qui décrit l'évolution en tangage d'une fusée-sonde. Les équations utilisées pour l'identification sont établies au chapitre précédent (§ I,3).

Le processus d'identification est déclenché à partir de l'instant où le système est soumis à un écart en assiette angulaire et à une entrée du type plus ou moins

La période d'échantillonnage est fixée dans cet exemple à 0,1 seconde.

II,3.2 - Identification d'un système du second ordre stationnaire

II,3.2.1 - Utilisation d'un modèle exact

Rappelons l'équation d'évolution simplifiée de la fusée :

$$\ddot{\theta} + b(t) \dot{\theta} + a(t) \theta = c(t) u$$

l'observation disponible étant l'écart angulaire θ .

Soit à effectuer l'identification des coefficients d'une "fusée fictive" d'équation stationnaire :

$$\ddot{\theta} + b \dot{\theta} + a \theta = c u$$

Les coefficients constants a, b, c correspondent aux caractéristiques de la fusée figées aux différents instants du vol.

L'équation récurrente correspondante est :

(II,24)

$$\theta_{k+2} = \theta_k \gamma^1 + \theta_{k+1} \gamma^2 + u_k \gamma^3 + u_{k+1} \gamma^4$$

ou encore :

$$\theta_{k+2} = \omega_{k+1}^T \gamma$$

avec :

$$\gamma^T = [\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4]$$

$$\omega_{k+1}^T = [\theta_k, \theta_{k+1}, u_k, u_{k+1}]$$

L'identification paramétrique de γ s'obtient en calculant le second membre de la relation (II,8).

Les coefficients a, b, c de l'équation différentielle continue sont calculés à partir des valeurs identifiées des éléments du vecteur γ par les relations suivantes, établies en annexe V :

$$\begin{cases} b = -\log(-\gamma^1) \\ \Delta = \frac{\gamma^1 + \gamma^2 - 1}{\gamma^3 + \gamma^4} \\ a = -\frac{b^2 [\gamma^1 + (1 + \gamma^4 \Delta)(\gamma^3 \Delta - \gamma^1)]}{[-1 - \gamma^1 + (\gamma^3 - \gamma^4) \Delta]^2} \\ c = -\frac{a}{\Delta} \end{cases}$$

Il a été vérifié que les valeurs identifiées de a, b, c sont bien égales aux valeurs réelles de ces coefficients, à la précision du calcul numérique près.

II,3.2.2 - Utilisation d'un modèle approché

Vérifions que, pour cet exemple, la méthode simplifiée exposée au § II,2.2, bien qu'approchée, conduit à des résultats acceptables.

Considérons l'équation récurrente approchée du système, obtenue en effectuant un développement limité au premier ordre en a^T , b^T , c^T des composantes du vecteur γ de l'équation récurrente exacte (II,24). Reprenons les expressions déjà établies au chapitre I (§ I,3) :

$$\begin{cases} \gamma^1 \simeq -1 + b^T \\ \gamma^2 \simeq 2 - b^T - a^T^2 \\ \gamma^3 \simeq c \frac{T^2}{2} \\ \gamma^4 \simeq c \frac{T^2}{2} \end{cases}$$

L'équation récurrente (II,24) devient alors :

(II,25)

$$\theta_{k+2} - 2\theta_{k+1} + \theta_k = -\theta_{k+1} a^T^2 + (\theta_k - \theta_{k+1}) b^T + \frac{u_k + u_{k+1}}{2} c^T^2$$

soit encore :

$$n_{k+2} = \mu_{k+1}^T p$$

avec :

$$p^T = [a^T^2, b^T, c^T^2]$$

$$\mu_{k+1}^T = \left[-\theta_{k+1}, \frac{\theta_k - \theta_{k+1}}{T}, \frac{u_k + u_{k+1}}{2} \right]$$

$$n_{k+2} = \theta_{k+2} - 2\theta_{k+1} + \theta_k$$

La matrice M_{k+1}^T, M_{k+1} de la relation (II,23) est alors de dimension (3x3) et le calcul d'identification fournit directement les valeurs des coefficients a, b, c de l'équation différentielle continue. Les valeurs identifiées de a, b, c ainsi que les erreurs résultant de l'emploi du modèle approché sont reportées dans le tableau II,1. Avec une période d'échantillonnage de 0,1 seconde, la précision obtenue pour ces coefficients est supérieure à 1 % pour les cas considérés.

TABLEAU II,1

PRÉCISION DE L'IDENTIFICATION AVEC UN MODÈLE APPROCHÉ

p_s : valeur exacte du paramètre
 p_I : valeur identifiée du paramètre

p	a	b	c
p_s	-0.14	0.055	0.2590
p_I	-0.1396	0.05485	0.2584
$\Delta p = p_s - p_I $	0.0004	0.00015	0.0006
$\frac{\Delta p}{ p_s }$	0.3 %	0.3 %	0.25 %

p	a	b	c
p_s	0.0866	0.11	0.2810
p_I	0.0861	0.1094	0.2796
$\Delta p = p_s - p_I $	0.0005	0.0006	0.0014
$\frac{\Delta p}{ p_s }$	0.6 %	0.55 %	0.5 %

p	a	b	c
p_s	1.916	0.1555	0.3030
p_I	1.898	0.1543	0.3003
$\Delta p = p_s - p_I $	0.018	0.0012	0.0027
$\frac{\Delta p}{ p_s }$	0.95 %	0.8 %	0.9 %

L'initialisation est simulée à partir des valeurs nulles des coefficients, les résultats correspondant aux caractéristiques figées aux instants 5, 10 et 15 secondes sont représentés dans la figure II,3. On constate que cette étape permet effectivement d'améliorer les valeurs données a priori des coefficients a, b, c . Si l'on néglige le temps de calcul de l'identification, la phase d'initialisation est terminée au bout de quatre périodes d'échantillonnage.

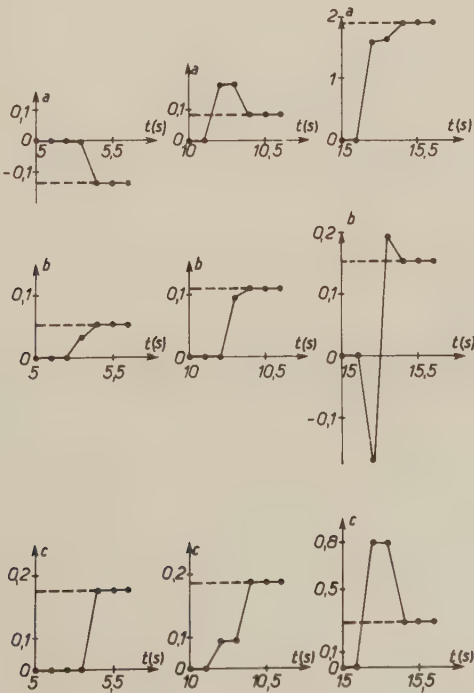


FIGURE II,3 - Initialisation de l'identification avec modèle approché

Remarque :

Avec le signal d'entrée adopté, la matrice $\Omega_{k-1}^T, \Omega_{k-1}$ (ou M_{k-1}^T, M_{k-1}) est régulière, l'identification des coefficients consiste à calculer la relation (II,20) (ou II,23) ci-dessus. Le cas d'une entrée rendant cette matrice singulière est volontairement écarté dans cet exemple, on y reviendra ultérieurement dans le chapitre relatif à l'auto-adaptation numérique.

II,3.3 - Identification d'un système du second ordre non stationnaire

Pour identifier les coefficients de l'équation décrivant l'évolution de la fusée-sonde (l'évolution des coefficients est donnée dans les figures I,1 et I,2 du chapitre I), on considère, comme modèle de la fusée, l'équation récurrente approchée donnée par la relation (II,25) du précédent paragraphe.

Ce choix est dicté par les raisons suivantes :

- le calcul d'identification est notablement simplifié, on a vu qu'il nécessite l'inversion d'une matrice (3x3) alors que l'emploi d'un modèle "exact" nécessiterait l'inversion d'une matrice (4x4)
- l'utilisation d'un modèle exact ne fournit pas de résultats meilleurs, étant lui-même basé sur l'hypothèse approximative de la stationnarité du système à identifier.

Le critère d'identification est, d'autre part, normalisé, c'est-à-dire que les vecteurs lignes de la matrice Ω_{k-1} sont normalisés. La valeur de ce critère, indépendante des grandeurs réelles de l'entrée et de la sortie, permet alors de caractériser la précision de l'identification.

On a représenté dans la figure II,4, avec des coefficients figés, l'allure des courbes iso-erreurs dans le plan (a,b). Ces courbes sont des ellipses allongées dans la direction de l'axe b, ce qui correspond à une faible sensibilité du critère par rapport à la variation du coefficient b.

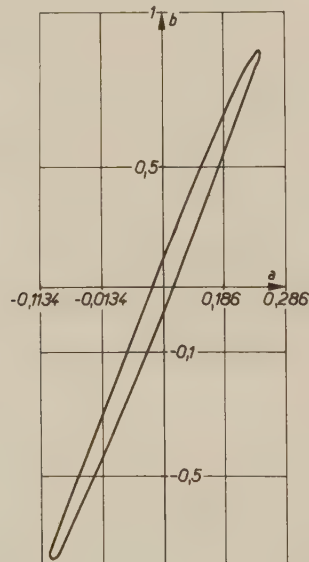


FIGURE II,4 - Allure des courbes iso-erreurs d'identification

Caractéristiques figées à $t = 5$ s. ($a = 0.0866$, $b = 0.11$, $c = 0.28$),
courbe $\epsilon = \text{cste}$ dans le plan d'équation $c = 0.28$.

Pour réduire les oscillations dues à l'identification, on a effectué un lissage des cinq dernières valeurs identifiées des coefficients et tenu compte du fait que le coefficient b relatif à l'amortissement aérodynamique de la fusée est toujours positif. D'autre part, le temps de calcul de l'identification est supposé inférieur ou égal à la période d'échantillonnage.

Les valeurs identifiées de ces paramètres sont reportées dans la figure II,5. De l'examen des courbes d'identification des coefficients a, b, c, on peut faire les remarques suivantes.

On constate que le coefficient c qui correspond au gain statique de la fonction de transfert de la fusée est toujours correctement identifié.

La valeur identifiée de a suit, avec un certain retard, la variation réelle de ce coefficient dont la vitesse atteint 1,5 dans la dernière phase de vol pilotée de la fusée. L'amorçage de la courbure qui commence aux environs de la huitième seconde de vol s'effectue par des oscillations de la valeur identifiée autour de la valeur exacte.

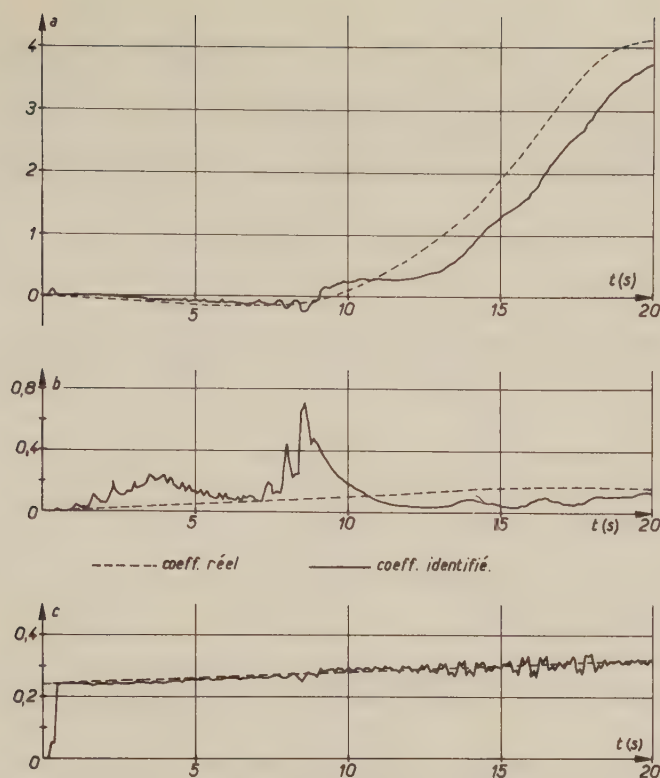


FIGURE II,5 - Identification paramétrique

Le coefficient b relatif à l'amortissement du système est sujet à des erreurs d'identification importantes, notamment à l'amorçage de la courbure du coefficient a . Ceci est dû à une faible sensibilité du critère par rapport à la variation de b .

II,3.4 - Conclusion

L'utilisation d'un modèle approché permet de simplifier notablement le calcul d'identification d'un système linéaire. Dans l'exemple d'un système du second ordre stationnaire, avec une période d'échantillonnage de 0,1 seconde, la précision des coefficients identifiés est supérieure à 1 %.

L'application de la minimisation quadratique à l'identification des paramètres évolutifs d'une fusée fournit des résultats corrects pour deux des coefficients caractéristiques de la fusée. L'amortissement, caractérisé par le coefficient b dont la valeur réelle est faible, est mal identifié.

S

III - COMMANDE SOUS-OPTIMALE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE NON STATIONNAIRE

On rappelle d'abord les résultats connus de la commande optimale d'un système linéaire à temps discret avec un indice de coût quadratique. Pour l'étude de l'auto-adaptation numérique, nous verrons qu'une telle commande ne peut pas être calculée à partir des caractéristiques identifiées du système : une loi sous optimale est alors proposée, basée sur une hypothèse simplifiée concernant l'évolution du système à commander. La validité du choix de cette commande est justifiée dans l'exemple numérique en comparant les performances du système muni de la commande sous-optimale à celles du système optimal.

III,1 - Définition du problème

La commande d'un système dynamique continu étant supposée ici élaborée par un ordinateur numérique, considérons son équation d'évolution discrète établie au chapitre I (§ I,1) sous la forme suivante :

(III,1)

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k$$

avec :

$x_k = x(kT)$: vecteur d'état du système

$u_k = u(kT)$: commande scalaire constante entre les instants d'échantillonnage de période T

$\left. \begin{matrix} F_k = F(kT) \\ G_k = G(kT) \end{matrix} \right\}$ matrices caractéristiques du système

Le problème est la régulation du système, c'est-à-dire, étant donné un écart initial x_0 non nul nous voulons ramener l'état x au voisinage de l'origine de l'espace de phase dans les meilleures conditions de précision et de consommation. Le choix d'un indice de performance permet de définir de façon précise la meilleure commande comme celle qui minimise cet indice.

La formulation du problème est donc la suivante :

Étant donné le système (III,1) évoluant de l'instant initial 0 à l'instant final $N T$ avec un écart initial x_0 , il s'agit de trouver une commande définie par la suite $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ qui minimise l'indice de coût quadratique :

(III,2)

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q_k x_k + r_k u_k^2) + \frac{1}{2} x_N^T Q_N x_N$$

où $Q_0, \dots, Q_{N-1}, Q_N$ sont des matrices symétriques définies positives et $r_0, \dots, r_{N-1}$ des nombres réels positifs.

Rappelons qu'une matrice Q définie positive est notée $Q > 0$ et vérifie la condition :

$$Q > 0 \iff x^T Q x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Un des avantages du critère quadratique est que la synthèse de la commande numérique du système, problème classique dans l'étude des asservissements, et consistant à exprimer la commande en fonction de l'écart (caractérisé ici par le vecteur d'état), peut être réalisée.

Le choix des éléments des matrices $Q_0, Q_1, \dots, Q_N$ et des scalaires $r_0, r_1, \dots, r_{N-1}$ intervenant dans l'indice de coût résulte d'un compromis précision-consommation. Pour $Q_0, \dots, Q_N$ donnés, en affectant respectivement aux termes $u_0^2, u_1^2, \dots, u_{N-1}^2$, des coefficients de pondération $r_0, \dots, r_{N-1}$ de valeurs élevées, on cherche surtout à minimiser la quantité $\sum r_k u_k^2$, c'est-à-dire "la consommation" du système qui peut être caractérisée par $\sum u_k^2$. D'autre part, en affectant à ces termes des coefficients de pondération de valeurs faibles, on désire surtout minimiser la somme des erreurs quadratiques du système représentée par le terme $\sum x_k^T Q_k x_k$, autrement dit on cherche à ramener au plus tôt l'état x_k à sa valeur nulle, en se permettant d'avoir une "consommation" $\sum u_k^2$ importante.

On rappelle d'abord les résultats connus relatifs à la commande optimale, on propose ensuite une loi de commande sous-optimale qui remplace la loi optimale, inapplicable dans un contexte d'auto-adaptation numérique.

III,2 - Commande optimale

III,2.1 - Commande optimale d'un système linéaire à temps final fini

III,2.1.1 - Détermination de la commande optimale

Rappelons ici un théorème dont la démonstration est donnée en Annexe et qui fournit une condition suffisante d'optimalité.

Théorème : Soient $u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*$ une commande, $x_0, x_1^*, \dots, x_N^*$ l'état correspondant, $\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_N^*$ le vecteur "adjoint" défini par la relation de récurrence :

$$(III,3) \quad \psi_k^* = F_k^T \psi_{k+1}^* - Q_k x_k^* \quad k = N-1, N-2, \dots, 0$$

avec la condition finale $\psi_N^* = -Q_N x_N^*$.

Pour que $u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*$ soit optimale, il suffit que quel que soit $k = 0, 1, \dots, N-1$, quel que soit $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ l'on ait :

$$(III,4) \quad \frac{1}{2} \lambda_k u_k^{*2} - \psi_{k+1}^{*T} G_k u_k^* \leq \frac{1}{2} \lambda_k u_k^2 - \psi_{k+1}^{*T} G_k u_k$$

On peut déduire de ce théorème la commande optimale. Pour qu'une commande soit optimale, il suffit qu'elle minimise la fonction quadratique en u_k au second membre de l'inégalité (III,4) quel que soit $k = 0, 1, \dots, N-1$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \left[\frac{1}{2} \lambda_k u_k^2 - \psi_{k+1}^{*T} G_k u_k \right] = 0$$

D'où l'expression de u_k^* :

$$(III,5) \quad u_k^* = \lambda_k^{-1} \psi_{k+1}^{*T} G_k = \lambda_k^{-1} G_k^T \psi_{k+1}^*$$

Vérifions que l'inégalité (III,4) est vraie quels que soient k , u_k lorsque la commande optimale est donnée par cette expression (III,5).

L'inégalité (III,4) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2} \lambda_k u_k^2 - \psi_{k+1}^{*T} G_k u_k - \frac{1}{2} \lambda_k u_k^{*2} + \psi_{k+1}^{*T} G_k u_k^* \geq 0$$

En tenant compte de (III,5) le premier membre de cette inégalité devient :

$$\frac{1}{2} \lambda_k u_k^2 - \lambda_k u_k^* u_k - \frac{1}{2} \lambda_k u_k^{*2} + \lambda_k u_k^{*2}$$

Soit :

$$\frac{1}{2} \lambda_k (u_k - u_k^*)^2 \geq 0$$

La commande u_k^* donnée par (III,5) est donc optimale.

Cherchons à exprimer sous la forme d'une relation linéaire en x_k^* la commande optimale définie par les relations (III,3) et (III,5).

Posons :

$$(III,6) \quad \psi_k^* = -P_k^* x_k^*$$

P_k^* étant une matrice carrée $n \times n$ à déterminer.

La commande optimale s'écrit alors : (le calcul est détaillé en Annexe III)

$$(III,7) \quad u_k^* = - \left[G_k^T P_{k+1}^* G_k + \lambda_k \right]^{-1} G_k^T P_{k+1}^* F_k x_k^*$$

la matrice P_{k+1}^* , vérifiant la relation de récurrence matricielle :

(III,8)

$$P_k^* = F_k^T P_{k+1}^* F_k - F_k^T P_{k+1}^* G_k [G_k^T P_{k+1}^* G_k + \lambda_k]^{-1} G_k^T P_{k+1}^* F_k + Q_k$$

avec $P_N^* = Q_N$ $k = N-1, N-2, \dots, 0$

On réalise ainsi un "bouclage" du système, la commande se mettant sous la forme d'une fonction linéaire des composantes de l'état.

La figure III,1 schématise le fonctionnement du système continu muni de la commande optimale discrète u_k^* .

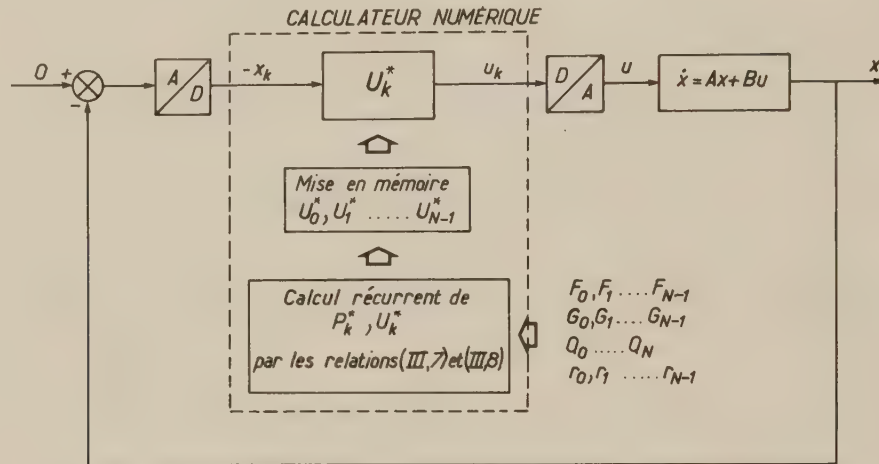


FIGURE III,1 - $\boxed{A/D}$: convertisseur analogique-numérique
 $\boxed{D/A}$: convertisseur numérique-analogique

On désigne dans la suite par système optimal le système (III,1) muni de la commande optimale définie par les relations (III,7) et (III,8).

Avec les notations :

$$U_k^* = [G_k^T P_{k+1}^* G_k + \lambda_k]^{-1} G_k^T P_{k+1}^* F_k = \text{matrice } 4 \times n \text{ de commande optimale à l'instant } kT,$$

$$H_k^* = F_k - G_k U_k^* = \text{matrice d'évolution } n \times n \text{ en "boucle fermée" du système optimal,}$$

les expressions (III,7) et (III,8) deviennent :

$$u_k^* = -U_k^* x_k^*$$

$$P_k^* = H_k^{*T} P_{k+1}^* H_k^* + \lambda_k U_k^{*T} U_k^* + Q \quad \text{avec } P_N^* = Q_N$$

L'équation d'évolution du système optimal devient :

$$x_{k+1}^* = (F_k - G_k U_k^*) x_k^*$$

Soit :

(III,9)

$$x_{k+1}^* = H_k^* x_k^* = H_k^* H_{k-1}^* \dots H_0^* x_0$$

III,2.1.2 - Coût optimal

Soit le coût restant à l'instant kT :

$$\frac{J}{T}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{N-1} (x_i^{*T} Q_i x_i^* + \lambda_i u_i^{*2}) + \frac{1}{2} x_N^{*T} Q_N x_N^*$$

On montre que ce coût s'exprime simplement par l'intermédiaire de la matrice P_k^* :

$$(III,10) \quad \frac{J}{T}^* = \frac{1}{2} x_k^{*T} P_k^* x_k^*$$

D'où le coût optimal total en faisant $k=0$:

$$(III,11) \quad \boxed{\frac{J}{T}^* = \frac{1}{2} x_0^T P_0^* x_0}$$

x_0 étant l'écart initial de l'état x .

III,2.2 - Commande optimale d'un système stationnaire à temps final infini

III,2.2.1 - Commande optimale

Le calcul de la commande optimale est considérablement simplifié lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- le système linéaire à commander est stationnaire,
- la matrice Q_k et le scalaire λ_k intervenant dans l'indice de coût sont constants,
- l'instant final est infini.

Dans ce cas, l'équation d'évolution s'écrit :

$$(III,12) \quad \boxed{x_{k+1} = F x_k + G u_k} \quad x_0 \text{ donné}$$

les matrices F et G étant constantes.

L'indice de coût à minimiser est :

$$(III,13) \quad \boxed{\frac{J}{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + \lambda u_k^2)}$$

où la matrice Q est définie positive et λ est un nombre réel positif.

On obtient le résultat suivant (voir Annexe IV) [1] : lorsqu'il existe une matrice U de dimension $1 \times n$ telle que la matrice $F - GU$ ait des valeurs propres de module inférieur à l'unité, la commande optimale est donnée par la relation :

$$(III,14) \quad \boxed{u_k^* = - [G^T P^* G + \lambda]^{-1} G^T P^* F x_k^*}$$

la matrice P^* étant la solution définie positive de l'équation matricielle :

$$(III,15) \quad \boxed{P^* = F^T P^* F - F^T P^* G [G^T P^* G + \lambda]^{-1} G^T P^* F + Q}$$

Ces expressions s'écrivent encore :

$$\boxed{\begin{aligned} u_k^* &= -U^* x_k^* \\ P^* &= H^{*T} P^* H^* + \lambda U^{*T} U^* + Q \end{aligned}}$$

avec les notations :

$$\boxed{\begin{aligned} U^* &= [G^T P^* G + \lambda]^{-1} G^T P^* F \\ H^* &= F - GU^* \end{aligned}}$$

La matrice de "bouclage" U^* est constante, le volume du calculateur numérique pourrait donc être réduit, si l'on effectuait au préalable le calcul de la matrice P^* , solution de l'équation matricielle (III,15).

La figure III,2 schématise le système stationnaire muni de la commande optimale.

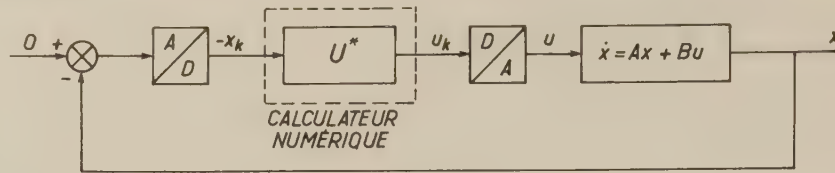


FIGURE III,2

L'équation d'évolution du système est alors :

$$(III,16) \quad \begin{aligned} x_{k+1}^* &= (F - GU^*) x_k^* \\ x_{k+1}^* &= H^* x_k^* = (H^*)^{k+1} x_0 \end{aligned}$$

Le coût optimal est :

$$\frac{J^*}{T} = \frac{1}{2} x_0^T P^* x_0$$

III,2.2.2 - Stabilité du système optimal

Rappelons d'abord quelques définitions et propriétés relatives à la stabilité asymptotique des systèmes linéaires stationnaires à temps discret.

Un système d'équation $x_{k+1} = F x_k = (F)^{k+1} x_0$, x_0 étant donné non nul, est dit asymptotiquement stable si l'état x_k tend vers zéro quand k tend vers l'infini.

Considérons un théorème relatif à la stabilité d'un système stationnaire à temps discret [10] :

Théorème : Pour qu'un système $x_{k+1} = F x_k$ soit asymptotiquement stable, il faut et il suffit qu'il existe deux matrices réelles B et C définies positives telles que l'on ait :

(III,17)

$$F^T B F - B = -C$$

Utilisons ce théorème pour démontrer la stabilité du système optimal stationnaire, écrivons pour cela la relation (III,15) sous la forme :

$$H^{*T} P^* H^* - P^* = - (Q + \lambda U^{*T} U^*)$$

La matrice P^* est la solution définie positive de l'équation (III,15). D'autre part, Q étant définie positive par hypothèse, il en est de même pour la matrice $Q + \lambda U^{*T} U^*$, λ étant positif. Le système optimal d'équation :

$$x_{k+1}^* = H^* x_k^*$$

est donc asymptotiquement stable.

III,2.2.3 - Extension au cas où la matrice de pondération de l'état intervenant dans l'indice de coût est semi-définie positive

Dans l'indice de coût :

$$\frac{J}{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + \lambda u_k^2)$$

la matrice Q est supposée définie positive.

Les résultats précédents concernant la commande optimale sont encore valables quand la matrice de pondération Q est seulement semi-définie positive (c'est-à-dire que la forme quadratique associée $x^T Q x$ peut s'annuler pour un vecteur x non nul).

Plus précisément, ces résultats sont encore applicables au cas où l'indice de coût se présente sous la forme suivante [1] :

$$\frac{J}{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T L^T L x_k + \lambda u_k^2)$$

où L est une matrice $p \times n$ de rang maximum ($p \leq n$) et le couple (L, F) est observable (on remarque que la matrice $L^T L$ est semi-définie positive).

III,3 - Commande sous-optimale

III,3.1 - Choix de la commande

Dans cette étude, le système linéaire à commander est essentiellement non stationnaire, rappelons son équation discrète :

(III,18)

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k$$

et l'indice de coût à minimiser :

(III,19)

$$\frac{J}{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q x_k + \lambda u_k^2) + \frac{1}{2} x_N^T Q x_N$$

Q et λ vérifient les conditions suivantes :

- λ est un nombre réel positif ;
- $Q = L^T L$ est une matrice semi-définie positive ;

(L est une matrice $p \times n$ de rang p , avec $p \leq n$), le couple (L, F_k) est observable pour $k=0, 1, \dots, N-1$).

La commande optimale d'un tel système est :

$$u_k^* = -U_k^* x_k^*$$

avec :

$$U_k^* = [G_k^T P_{k+1}^* G_k + \lambda]^{-1} G_k^T P_{k+1}^* F_k$$

P_{k+1}^* vérifiant la relation récurrente :

$$P_k^* = F_k^T P_{k+1}^* F_k - F_k^T P_{k+1}^* G_k [G_k^T P_{k+1}^* G_k + \lambda]^{-1} G_k^T P_{k+1}^* F_k + Q$$

$$k = N-1, N-2, \dots, 0 \quad \text{et} \quad P_N^* = Q$$

Le calcul numérique de la commande optimale u_k^* , à l'instant k^T , nécessiterait, par l'intermédiaire de la matrice P_{k+1}^* , qui est déterminée par une équation récurrente rétrograde, la connaissance des matrices $F_k, F_{k+1}, \dots, F_{N-1}$ et $G_k, G_{k+1}, \dots, G_{N-1}$ correspondant aux caractéristiques ultérieures du système à commander.

Pour l'auto-adaptation numérique, la commande optimale ne pourrait donc pas être calculée, les caractéristiques futures du système étant inconnues.

Une commande sous-optimale est obtenue en adoptant, à chaque instant k^T , la commande qui serait optimale si :

- l'horizon N était infini ;
- le système avait des coefficients constants (égaux à ceux connus à l'instant k^T).

En pratique, l'action de la commande est surtout prépondérante au début de la phase de stabilisation, l'écart à réduire ayant à ce moment une valeur élevée. Avec une faible période d'échantillonnage, durant ces premiers instants (l'entier k prenant des valeurs faibles) l'horizon $(N-k)$ est alors très grand, ce qui justifie l'hypothèse d'un horizon infini. La deuxième hypothèse suppose que, dans cette première phase, les caractéristiques du système ne varient pas trop rapidement.

Désignons par u_k^a la commande sous-optimale définie ci-dessus, sa valeur, donnée par les expressions (III,14) et (III,15), s'écrit : (les quantités relatives à la commande sous-optimale sont notées avec l'exposant " a ")

$$(III,20) \quad u_k^a = - \left[G_k^T P_{k+1}^a G_k + \lambda \right]^{-1} G_k^T P_{k+1}^a F_k x_k^a$$

la matrice P_{k+1}^a étant la solution semi-définie positive de l'équation matricielle :

$$(III,21) \quad P_{k+1}^a = F_k^T P_{k+1}^a F_k - F_k^T P_{k+1}^a G_k \left[G_k^T P_{k+1}^a G_k + \lambda \right]^{-1} G_k^T P_{k+1}^a F_k + Q$$

Ces expressions s'écrivent encore :

$$\begin{aligned} u_k^a &= - U_k^a x_k^a \\ P_{k+1}^a &= H_k^{aT} P_{k+1}^a H_k^a + \lambda U_k^{aT} U_k^a + Q \end{aligned}$$

avec les notations :

$$\begin{aligned} U_k^a &= \left[G_k^T P_{k+1}^a G_k + \lambda \right]^{-1} G_k^T P_{k+1}^a F_k \\ H_k^a &= F_k - G_k U_k^a \end{aligned}$$

La figure III,3 schématise le fonctionnement du système sous-optimal, c'est-à-dire du système (III,18) muni de la commande sous-optimale

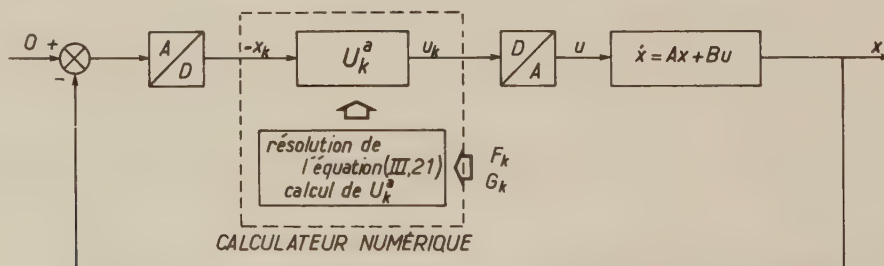


FIGURE III,3

D'après l'expression de la commande sous-optimale donnée par les relations (III,20) et (III,21) on peut remarquer les points suivants :

- la commande u_k^a est une combinaison linéaire des composantes de l'état x_k , ce qui permet de réaliser un bouclage du système commandé sous-optimal ;
- à chaque instant, le calcul de u_k^a est effectué à partir des valeurs actuelles des matrices F_k et G_k qui peuvent éventuellement être obtenues par un processus d'identification paramétrique.

III,3.2 - Stabilité de la matrice d'évolution en boucle fermée

On peut déduire, du choix de la commande, une propriété intéressante de la matrice d'évolution en boucle fermée du système sous-optimal.

Avec les notations du précédent paragraphe, l'équation d'évolution du système s'écrit :

$$x_{k+1}^a = (F_k - G_k U_k^a) x_k^a$$

soit :

(III,22)

$$x_{k+1}^a = H_k^a x_k^a$$

H_k^a étant, par définition, la matrice d'évolution en boucle fermée d'un système optimal stationnaire à horizon infini (dont les caractéristiques sont égales à celles du système réel à l'instant k^*) : elle est donc asymptotiquement stable. Toutes ses valeurs propres sont, par conséquent (d'après [10]), de module inférieur à l'unité.

On en déduit l'inégalité suivante concernant l'état du système muni de la commande sous-optimale, en tenant compte de la relation (III,22) :

$$\|x_{k+1}^a\| < \|x_k^a\| \quad \text{avec} \quad \|x\| = (x^T x)^{1/2}$$

soit encore :

(III,23)

$$\|x_N^a\| < \dots < \|x_{k+1}^a\| < \dots < \|x_0\|$$

Cette dernière inégalité montre que la commande sous-optimale permet de réduire l'écart du système, à partir d'un écart initial x_0 non nul.

III,3.3 - Calcul numérique de la commande sous-optimale

Le calcul de la commande sous-optimale nécessite, à chaque instant, la résolution d'une équation matricielle donnée par la relation (III,21).

De l'étude de la commande optimale du système stationnaire à horizon infini, on peut déduire deux algorithmes permettant de résoudre numériquement cette équation.

III,3.3.1 - Algorithme à convergence linéaire

Rappelons l'équation matricielle à résoudre (III,21), où nous avons supprimé l'indice k et l'exposant a pour simplifier l'écriture :

(III,24)

$$P = F^T P F - F^T P G [G^T P G + \lambda]^{-1} G^T P F + Q$$

Pour résoudre cette équation, on peut utiliser dans le sens direct la relation de récurrence rétrograde intervenant dans la commande optimale (III,7) :

(III,25)

$$P_{i+1} = F^T P_i F - F^T P_i G [G^T P_i G + \lambda]^{-1} G^T P_i F + Q$$

P_i est la valeur approchée de P à la i ème itération.

Avec une valeur initiale $P_0 \geq 0$, on montre en annexe que cet algorithme converge vers la solution P définie positive de l'équation matricielle à résoudre (III,24).

Cet algorithme s'écrit encore :

$$P_{i+1} = H_i^T P_i H_i + \lambda U_i^T U_i + Q$$

avec :

$$U_i = [G^T P_i G + \lambda]^{-1} G^T P_i F$$

$$H_i = F - G U_i$$

Avec ces notations, le calcul de la vitesse de convergence de cet algorithme se trouve simplifié.

Posons : $\delta P_i = P_i - P$

Un calcul effectué en annexe conduit à la relation suivante :

$$\delta P_{i+1} = H^T \delta P_i H_i$$

δP_{i+1} dépend linéairement de δP_i , la convergence de l'algorithme (III,25) est donc linéaire.

III,3.3.2 - Algorithme à convergence quadratique

Pour résoudre l'équation matricielle de "Riccati" correspondant au système à temps continu, un algorithme à convergence quadratique a été proposé [13]. Dans le cas discret traité ici, on peut utiliser l'algorithme analogue :

(III,26)

$$P_{i+1} - H_i^T P_{i+1} H_i = \lambda U_i^T U_i + Q$$

avec :

(III,27)

$$U_i = [G^T P_i G + \lambda]^{-1} G^T P_i F$$

$$H_i = F - G U_i$$

Le calcul récurrent de P_i s'effectue de la manière suivante : P_0 étant donné, on calcule d'abord U_0 et H_0 donnés par la relation (III,27), P_1 se calcule ensuite par l'intermédiaire de la relation (III,26), et ainsi de suite.

On montre (voir Annexe III) que P_i converge vers la solution P définie positive de l'équation matricielle (III,24) si la valeur initiale P_0 est choisie semi-définie positive telle que la matrice $H_0 = F - G U_0$ soit asymptotiquement stable.

En posant $\delta P_i = P_i - P$, on a : (les détails de calcul sont en annexe)

$$\delta P_{i+1} - H_i^T \delta P_{i+1} H_i = H^T \delta P_i G [G^T P_i G + \lambda]^{-1} [G^T P G + \lambda] [G^T P_i G + \lambda]^{-1} G^T \delta P_i H$$

La convergence de l'algorithme (III,26) est quadratique, chaque élément de δP_{i+1} étant une fonction quadratique des éléments de δP_i .

Remarquons que le domaine de convergence de cet algorithme est plus restreint que celui de l'algorithme précédent (donné par la relation III,25).

III,4 - Exemple

III,4.1 - Rappel des données - Indice de coût

Rappelons l'équation différentielle décrivant l'évolution d'une fusée-sonde définie au chapitre I (§ I,3) :

$$\ddot{\theta} + b \dot{\theta} + a \theta = c u$$

l'évolution des coefficients a , b et c en fonction du temps étant indiquée dans les figures I,1 et I,2 (chapitre I).

L'équation d'état discrète correspondante est :

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k$$

avec :

$$x_k = \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_k \\ q_k \end{bmatrix}$$

θ_k et q_k étant respectivement l'écart et la vitesse angulaire par rapport à la trajectoire nominale, la stabilisation de la fusée consiste à annuler les composantes θ_k et q_k du vecteur état.

L'instant final NT correspond à la fin de combustion du premier étage de la fusée, c'est-à-dire 20 secondes.

Nous considérons, pour l'étude de la commande adoptée, la réponse du système commandé à une percussion angulaire, survenant aux différents instants de vol, et se traduisant par une discontinuité d'amplitude donnée sur la vitesse angulaire.

On considère l'indice de coût suivant :

$$\frac{J}{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (\theta_k^2 + \lambda u_k^2) + \frac{1}{2} \theta_N^2$$

On se borne ici à comparer les performances du système commandé par la loi sous-optimale définie dans le paragraphe précédent à celles du système optimal. Pour cela on suppose connues à chaque instant, outre l'évolution des caractéristiques du système, les deux composantes θ_k et q_k du vecteur d'état x_k .

Mettons auparavant en évidence l'influence du choix du coefficient de pondération λ sur le comportement du système optimal.

III,4.2 - Influence du choix du coefficient de pondération de l'indice de coût sur le comportement du système optimal

L'évolution du système non commandé soumis à une percussion angulaire aux différents instants de vol est d'abord représentée dans les figures III,4 et III,5. La période d'échantillonnage étant fixée à 0,1 seconde, on a reporté dans la figure III,6 la réponse du système muni de la commande optimale à une percussion angulaire apparaissant à la cinquième et à la quinzième seconde de vol, pour des valeurs de λ comprises entre 0,1 et 0,001.

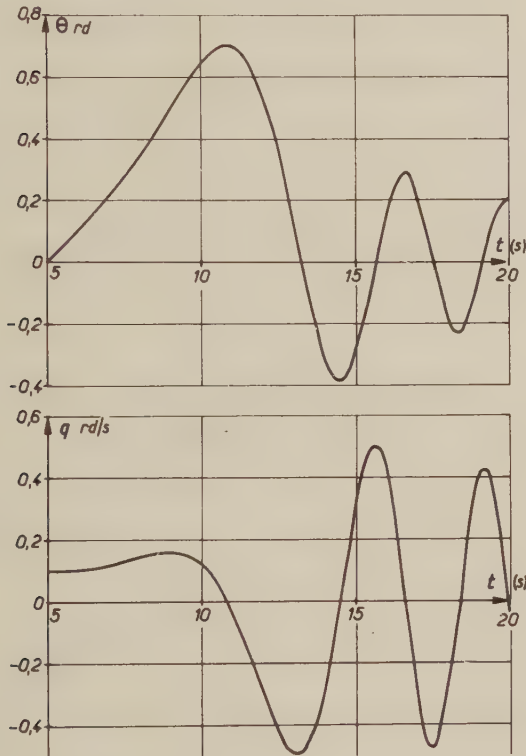


FIGURE III,4

Evolution de la fusée non pilotée soumise à une percussion angulaire à $t = 5$ secondes

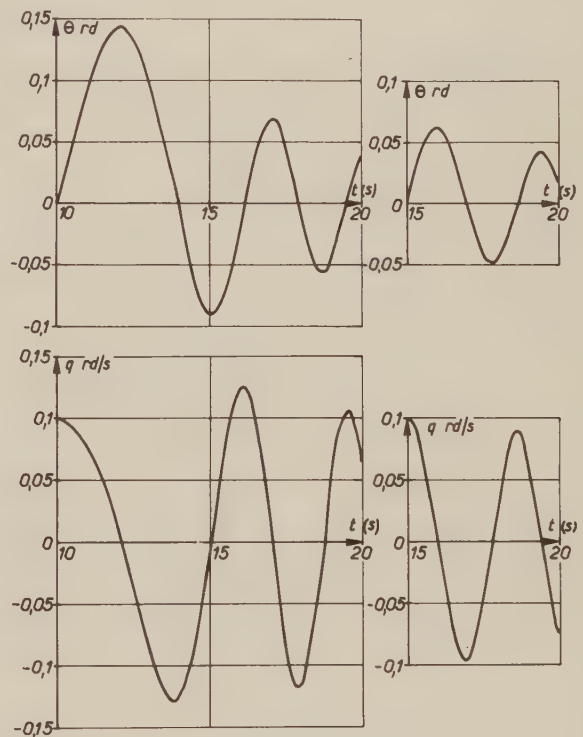


FIGURE III,5

Evolution de la fusée non pilotée soumise à une percussion angulaire à $t = 10$ s., $t = 15$ s.

Ces courbes illustrent bien le compromis précision-consommation que l'on aura à résoudre lors du choix du coefficient de pondération de l'indice de coût. En effet, on constate sur ces courbes que pour $\lambda = 0,001$ le temps de réponse à 5 % en vitesse angulaire est inférieur à 1,5 seconde avec une "consommation" $\frac{T}{2} \sum u_k^2$ supérieure à 0,14 (pour une perturbation initiale $\theta_0 = 0, q_0 = 0,1$ rd/s), alors que pour $\lambda = 0,1$, le système oscille fortement pour une même perturbation survenue à la quinzième seconde de vol, la "consommation" restant inférieure à 0,08.

En supposant l'évolution des caractéristiques du système connue, on peut indiquer comment construire une courbe qui nous guidera dans le choix de λ .

Pour une valeur donnée de λ , on peut faire correspondre dans un plan (X, Y) un point de

composantes $X_\lambda^* = \frac{T}{2} \sum u_k^{*2}$, $Y_\lambda^* = \frac{T}{2} \sum \theta_k^{*2}$ relatif au système optimal. Le coût optimal vaut alors, pour cette valeur de λ :

$$J_\lambda^* = \frac{T}{2} \sum_k (\theta_k^{*2} + \lambda u_k^{*2}) = Y_\lambda^* + \lambda X_\lambda^*$$

En faisant varier λ , on obtient ainsi une courbe (C^*) correspondant à une perturbation donnée (fig. III,7 et III,8).

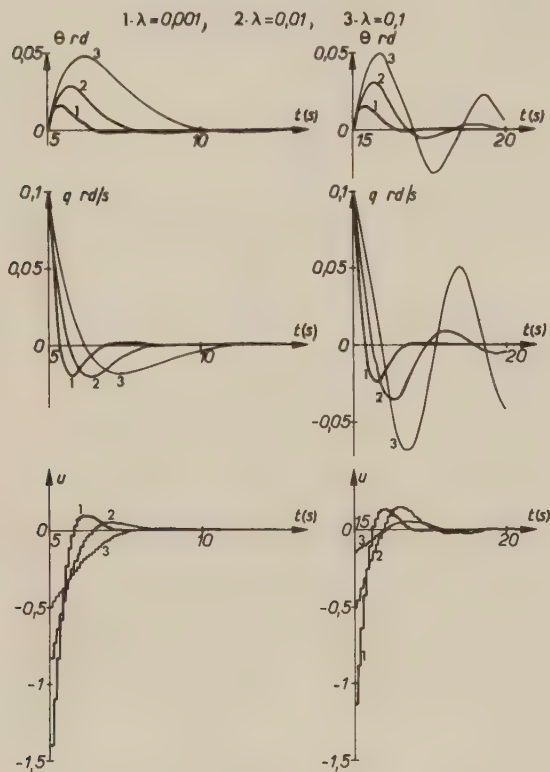


FIGURE III,6

Influence de λ sur le comportement du système optimal

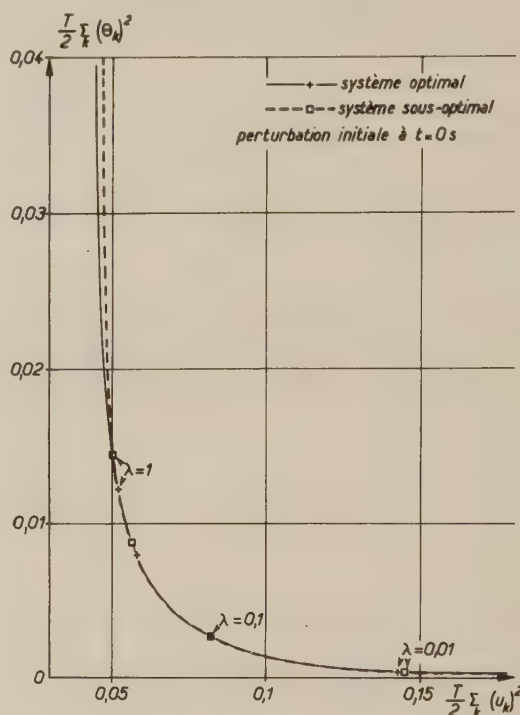


FIGURE III,7

Comparaison des performances du système optimal et du système sous-optimal

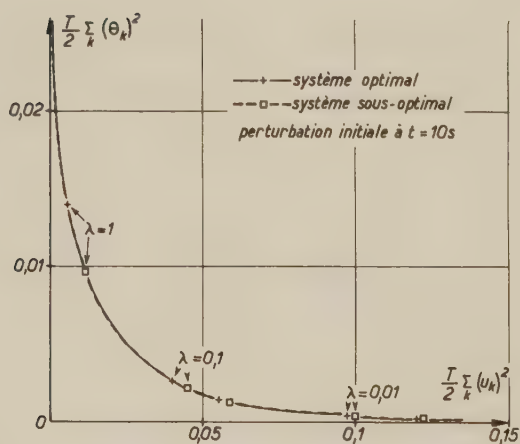


FIGURE III,8 - Comparaison des performances du système optimal et du système sous-optimal.

Le coefficient λ peut être ainsi déterminé à l'aide de ces courbes (C^*) , si l'on fixe l'une des quantités $\sum \theta_k^2, \sum u_k^2$.

Remarque : On peut construire de façon analogue les courbes (C^a) relatives à la commande sous-optimale.

III,4.3.- Calcul numérique de la commande sous-optimale

La résolution numérique, à chaque instant d'échantillonnage, de l'équation matricielle non linéaire en P_{k+1} (cf. relation III,21), nécessaire pour calculer la commande sous-optimale, est effectuée en deux phases :

1°) - Initialisation

Les deux algorithmes proposés au § III,3 pour résoudre l'équation relative à l'instant initial sont utilisés.

L'algorithme à convergence linéaire (relation III,25) est d'abord utilisé, avec comme valeur initiale de l'itération $P_0 = I$. Lorsque, pour une certaine valeur P_i correspondante à la i ème itération, le "domaine de convergence" de l'algorithme à convergence quadratique est atteint (c'est-à-dire lorsque la matrice $F - G U_i$ est asymptotiquement stable), ce dernier algorithme est employé, avec cette valeur de P_i comme valeur initiale de l'itération, ce qui permet d'accélérer la convergence vers la solution de l'équation matricielle correspondante.

2°) - Processus courant

Pour résoudre l'équation matricielle correspondant à un instant courant kT , seul l'algorithme à convergence quadratique est utilisé, la valeur initiale de l'itération étant celle de la matrice P_k^a solution de l'équation matricielle relative à l'instant antérieur $(k-1)T$.

Le nombre d'itérations se trouve alors réduit. En effet, entre deux instants consécutifs, les quantités $F_k - F_{k-1}$ et $G_k - G_{k-1}$ sont faibles, on peut prévoir qu'il en sera de même de $P_{k+1}^a - P_k^a$, P_{k+1}^a et P_k^a étant les solutions de deux équations matricielles de même type (relation III,21) avec des coefficients de valeurs voisines.

La solution obtenue est jugée satisfaisante si l'erreur relative $(p_{i+1}^{kl} - p_i^{kl})/p_i^{kl}$ est inférieure à une certaine valeur fixée, p_i^{kl} et p_{i+1}^{kl} étant les éléments des matrices P_i et P_{i+1} , valeurs consécutives de l'itération.

Pour le système du second ordre considéré dans cette étude, en une itération, on obtient une erreur relative $|(p_{i+1}^{kl} - p_i^{kl})/p_i^{kl}|$ inférieure à 5 %, précision qui s'avère suffisante pour calculer la commande sous-optimale.

III,4.4 - Comparaison des performances du système optimal et du système sous-optimal

On a reporté dans les figures III,7 et III,8 les courbes (C^a) , graduées en λ , représentant les quantités $Y = \frac{T}{2} \sum \theta_k^2$, $X = \frac{T}{2} \sum u_k^2$ relatives au système muni de la commande sous-optimale. La figure III,9 schématise la disposition relative de ces courbes par rapport aux courbes (C^*) correspondant à la commande optimale. Les courbes (C^a) et (C^*) se rejoignent sur l'axe des Y au point $(0, Y_{NC})$ correspondant à l'évolution du système non commandé ($u_k = 0$), la valeur du paramètre λ de l'indice de coût étant alors infinie.

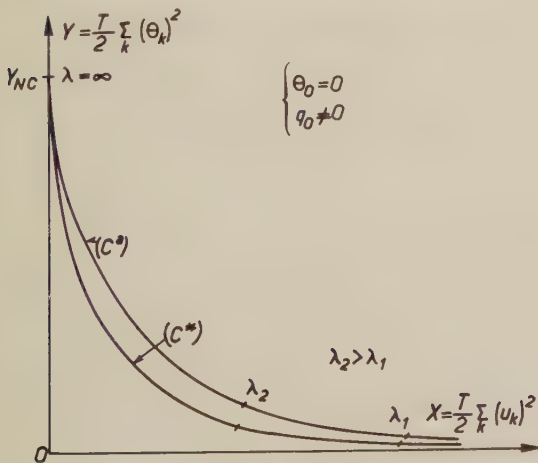


FIGURE III,9
Allure des courbes (C^*) et (C^a)

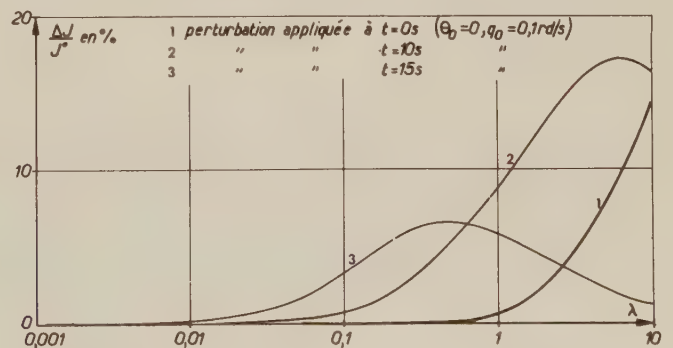


FIGURE III,10 - Comparaison des performances du système optimal et du système sous-optimal

D'autre part, aux faibles valeurs de λ , ces courbes se rapprochent l'une de l'autre, ce qui correspond à une décroissance de la quantité $(J^a - J^*)/J^*$: les hypothèses de calcul de la commande sous-optimale se trouvent, dans ce cas, justifiées, le retour à zéro de l'état du système étant effectué, en effet, au bout d'un intervalle de temps faible où les caractéristiques du système n'ont pas beaucoup varié. Dans la figure III,10 des courbes $(J^a - J^*)/J^*$ sont tracées en fonction du coefficient de pondération λ (chacune d'elles est relative à une percussion angulaire appliquée à un instant donné); la forme en cloche de ces courbes correspond bien à la disposition relative de courbes (c^a) et (c^*) schématisée par la figure III,9.

Remarquons sur cette figure que, pour les valeurs faibles de λ ($\lambda \leq 0,1$) qui conduisent à une bonne stabilisation du système, l'erreur relative du coût du système sous-optimal par rapport à celui du système optimal reste inférieure à 2 % pour une perturbation ($\theta_0 = 0, q_0 = 0,1$ rd/s) survenant dans les quinze premières secondes de vol.

On a tracé dans les figures III,11 et III,12 les réponses de la fusée munie de la commande optimale, puis de la commande sous-optimale, à une percussion angulaire appliquée aux instants cinq et quinze secondes. La valeur de $\lambda = 0,01$ peut être considérée comme acceptable sur cet exemple.

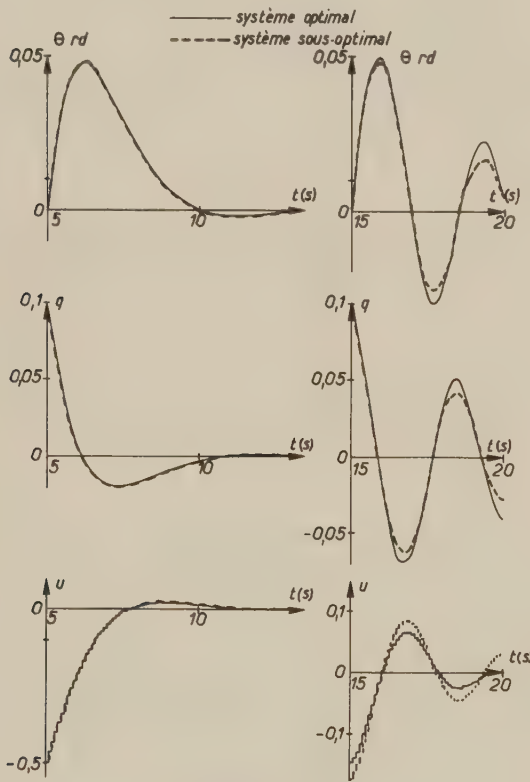


FIGURE III,11 -

Réponses du système optimal et du système sous-optimal à une percussion angulaire à $t = 5$ s., 15 s. ($\lambda = 0,1$)

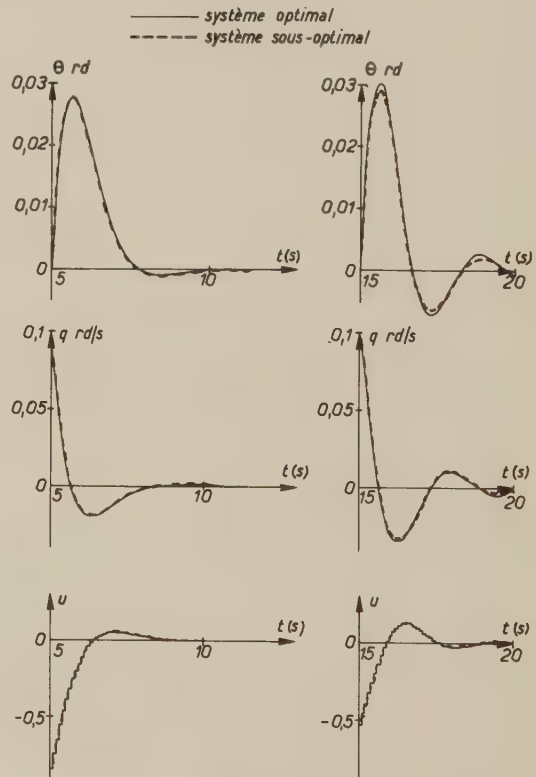


FIGURE III,12 -

Réponses du système optimal et du système sous-optimal à une percussion angulaire à $t = 5$ s., 15 s. ($\lambda = 0,01$)

III,4.5 - Conclusion

De l'exemple numérique précédent où les caractéristiques de la fusée à piloter sont fortement variables, les performances du système muni de la commande sous-optimale peuvent être rendues sensiblement voisines de celles du système optimal, si l'on adopte un coefficient de pondération de l'indice de coût convenable ($\lambda \ll 1$) permettant d'assurer une stabilisation correcte de la fusée.

Le bon comportement de la commande sous-optimale pour l'exemple considéré permet d'envisager son application à l'auto-adaptation numérique, ce qui constitue l'objet du chapitre suivant.

e

IV - AUTO-ADAPTATION NUMÉRIQUE

Ce chapitre réalise la synthèse des études précédentes relatives à l'identification paramétrique et à la commande sous optimale, en vue de l'auto-adaptation numérique d'un système linéaire.

Après avoir établi les opérations à effectuer par un calculateur numérique pour élaborer une loi de commande auto-adaptative, une simulation est effectuée sur un système du second ordre à coefficients variables.

IV,1 - Méthode générale

IV,1.1 - Principe

Rappelons que le but de notre étude est la régulation optimale d'un système dynamique linéaire dont les coefficients varient au cours du temps et, en outre, peuvent être inconnus, la loi de commande étant supposée élaborée par un calculateur numérique fonctionnant en temps réel.

Seul le cas où l'on dispose d'une observation scalaire de l'état du système linéaire sera traité dans ce chapitre.

Rappelons l'équation matricielle continue décrivant l'évolution d'un tel système (cf. chapitre I, § I,1) :

$$(IV,1) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ z = Cx \end{cases}$$

où x : vecteur d'état de dimension n

u : commande scalaire

z : observation scalaire

$A (n \times n)$, $B (n \times 1)$: matrices d'évolution d'éléments $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0$ inconnus et dépendant du temps

C : matrice constante $(1 \times n)$.

Etant donné la nature séquentielle des opérations élaborées par le calculateur, on effectue une discrétisation dans l'axe des temps : les observations sont prélevées à des instants discrets de période constante T et la commande u est choisie constante entre les instants d'échantillonnage.

L'équation discrète correspondante à l'équation continue (IV,1) s'écrit alors :

$$(IV,2) \quad \begin{cases} x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k \\ z_k = C x_k \end{cases}$$

où F_k et G_k s'expriment en fonction de A et B par des relations précisées au chapitre I (§ I,1).

Pour commander le système, nous adoptons, pour les raisons déjà mentionnées (§ III,3.1), la loi sous-optimale proposée dans le chapitre III.

Si l'on considère l'indice de performance du type :

$$(IV,3) \quad \frac{J}{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q x_k + \lambda u_k^2) + \frac{1}{2} x_N^T Q x_N$$

où λ est un scalaire positif et Q une matrice semi-définie positive vérifiant la condition énoncée au chapitre III (§ III,3), la commande sous-optimale, à l'instant kT , s'écrit :

$$(IV,4) \quad u_k = - [G_k^T P_{k+1} G_k + \lambda]^{-1} G_k^T P_{k+1} F_k x_k$$

où P_{k+1} est une solution semi-définie positive de l'équation :

$$(IV,5) \quad P_{k+1} = F_k^T P_{k+1} F_k - F_k^T P_{k+1} G_k [G_k^T P_{k+1} G_k + \lambda]^{-1} G_k^T P_{k+1} F_k + Q$$

Les matrices F_k et G_k , nécessaires pour calculer cette commande, sont identifiées à partir des grandeurs disponibles du système (observations $z_0, z_1, \dots, z_k$ et commandes $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$) par l'une des méthodes décrites au chapitre II).

On réalise ainsi une auto-adaptation numérique du système : le calculateur élabore les paramètres caractéristiques du système à commander et ajuste, à chaque instant d'échantillonnage, la commande u_k en fonction de ces paramètres identifiés.

On a développé au chapitre II deux méthodes d'identification : une méthode "exacte" donnant en principe une identification rigoureuse pour un système stationnaire, et une méthode "approchée", basée sur un calcul au premier ordre.

A chacune d'elles correspond une méthode d'auto-adaptation que l'on appellera respectivement "exacte" et "approchée".

IV,1.2 - Méthode "exacte"

On a vu que l'identification du système consiste à déterminer les $2n$ coefficients $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{2n}$ de l'équation récurrente :

(IV,6)

$$z_{k+n} = \gamma^1 z_k + \gamma^2 z_{k+1} + \dots + \gamma^n z_{k+n-1} + \gamma^{n+1} u_k + \dots + \gamma^{2n} u_{k+n-1}$$

et conduit au calcul suivant : (cf. chapitre II, § II,1)

(IV,7)

$$\gamma_k = [\Omega_{k-1}^T \Omega_{k-1}]^{-1} \Omega_{k-1}^T J_k$$

avec : Ω_{k-1} = matrice $n \times 2n$, n étant donné $\geq 2n$

J_k = vecteur colonne à n composantes

J_k, Ω_{k-1} étant constitués de valeurs antérieures de z_k et de u_k (cf. relation II,2.2 du chapitre II).

Pour calculer la commande sous-optimale u_k , il faut d'abord déterminer les matrices F_k et G_k à partir de γ_k identifié.

On ne traite pas le cas général où l'indice de coût est donné par la relation (IV,3) et qui exigerait de longs calculs. Notons seulement qu'une méthode de calcul est déjà indiquée au chapitre II (§ II,1).

Considérons le cas où une forme particulière de l'indice de coût permet de simplifier cette opération.

Supposons que l'on puisse écrire cet indice sous la forme suivante :

(IV,8)

$$\frac{J}{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (q z_k^2 + r u_k^2) + q z_N^2$$

dans lequel seule la composante observée z_k de l'état x_k est pénalisée (q est un scalaire > 0).

En considérant alors un changement de base de l'espace d'état défini par :

$$y_k = M x_k$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CF_k \\ \vdots \\ CF_k^{n-1} \end{bmatrix}$$

les formes des matrices F_k et G_k se simplifient et la commande u_k peut s'exprimer uniquement en fonction des matrices relatives à la nouvelle base.

En effet, avec ce changement de base, l'équation discrète (IV,2) devient (cf. chapitre I, § I,2) :

(IV,9)

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= D_k y_k + E_k u_k \\ z_k &= [1, 0, \dots, 0] y_k \end{aligned}$$

avec :

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ d_k^1 & d_k^2 & \dots & d_k^n \end{bmatrix} \quad E_k = \begin{bmatrix} e_k^1 \\ e_k^2 \\ \vdots \\ e_k^n \end{bmatrix}$$

et l'indice de coût J s'écrit, si l'on fait intervenir l'état y_k :

(IV,10)

$$\frac{J}{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (y_k^T S y_k + \lambda u_k^2) + \frac{1}{2} y_N^T S y_N$$

avec :

$$S = \begin{bmatrix} q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ & & 0 & \end{bmatrix}$$

Par suite, la commande u_k s'exprime uniquement en fonction des caractéristiques intervenant dans les relations (IV,9) et (IV,10) :

(IV,11)

$$u_k = - [E_k^T P'_{k+1} E_k + \lambda]^{-1} E_k^T P'_{k+1} D_k y_k$$

P'_{k+1} étant une solution de l'équation analogue à l'équation (IV,5) :

(IV,12)

$$P'_{k+1} = D_k^T P'_{k+1} D_k - D_k^T P'_{k+1} E_k [E_k^T P'_{k+1} E_k + \lambda]^{-1} E_k^T P'_{k+1} D_k + S$$

Or, les éléments des matrices D_k et E_k se calculant aisément à partir de $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{2n}$ identifiés par les relations suivantes (cf. chapitre II, relation II,4) :

(IV,13)

$$\left\{ \begin{aligned} d^1 &= \gamma^1 \\ &\dots \\ d^n &= \gamma^n \\ e^1 &= \gamma^{2n} \\ e^2 &= \gamma^{2n-1} + d^n e^1 \\ &\dots \\ e^n &= \gamma^{n+1} + d^n e^{n-1} + \dots + d^2 e^1 \end{aligned} \right.$$

L'élaboration de u_k nécessite en outre la résolution d'une équation matricielle non linéaire en P'_{k+1} (relation IV,12) et la reconstitution de l'état y_k .

P'_{k+1} peut être obtenu par un des algorithmes de résolution indiqué au précédent chapitre (§ III,3). L'état y_k peut être déterminé par l'une des méthodes suivantes :

1°) - on peut chercher à calculer y_k à partir uniquement des grandeurs disponibles $z_0, z_1, \dots, z_k, u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ et des matrices D_k, E_k récemment identifiées.

Rappelons que l'on a : (cf. Annexe I)

(IV,14)

$$y_{k-n+1} = \begin{bmatrix} z_{k-n+1} \\ z_{k-n+2} \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ e^1 u_{k-n+1} \\ \vdots \\ e^{n-1} u_{k-n+1} + \dots + e^1 u_{k-1} \end{bmatrix}$$

si bien qu'à l'instant kT , la valeur la plus récente connue pour y est y_{k-n+1} . On calculera y_k par extrapolation par la formule :

(IV,15)

$$y_k = (D_k)^{n-1} y_{k-n+1} + (D_k)^{n-2} E_k u_{k-n+1} + \dots + D_k E_k u_{k-2} + E_k u_{k-1}$$

On peut vérifier que ce calcul redonne, pour la première composante de y_k , la valeur :

$$y_k^1 = z_k$$

qui est la sortie mesurée du système.

Remarquons que si le processus démarre à partir de l'instant 0, y_{k-n+1} donné par la relation (IV,14) ne sera connu que pour $k \geq n-1$;

2°) - on peut calculer y_k par la relation (IV,9) à partir de l'état antérieur y_{k-1} , ce calcul étant plus simple que la relation (IV,15) de la méthode précédente.

Comparons brièvement les deux méthodes indiquées. La deuxième méthode revient à prendre :

$$y_k = D_{k-1} D_{k-2} \dots D_{k-n+1} y_{k-n+1} + D_{k-1} D_{k-2} \dots D_{k-n+2} E_{k-n+1} u_{k-n+1} + \dots + D_{k-1} E_{k-2} u_{k-2} + E_k u_{k-1}$$

$D_{k-n+1}, D_{k-n+2}, \dots, D_{k-1}, E_{k-n+1}, E_{k-n+2}, \dots, E_k$ étant les valeurs identifiées de D, E aux instants $(k-n+1)T, (k-n+2)T, \dots, (k-1)T$.

On constate qu'elle présente, par rapport à la première, les inconvénients suivants :

- 1) la première composante de y_k n'est plus exactement le z_k mesuré ;
- 2) elle a la mémoire des erreurs : une erreur d'identification à l'instant jT se répercute à tout instant ultérieur $kT > jT$ par l'intermédiaire de D_j, E_j .

La figure IV,1 schématise la boucle complète de l'auto-adaptation effectuée par la méthode qui vient d'être décrite.

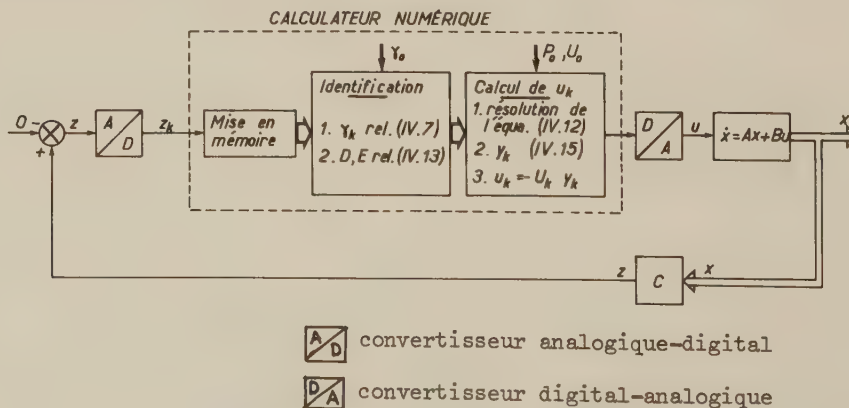


FIGURE IV,1 - Schéma du système de commande en boucle fermée

IV,1.3 - Méthode "approchée"

Cette méthode ne diffère de la précédente qu'en ce qui concerne l'étape d'identification où l'on considère une expression approchée de l'équation (IV,6) comme modèle du système à identifier. Rappelons qu'au chapitre II (§ II,2.2), cette approximation conduit à l'identification directe des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0$ de l'équation continue (IV,1), ceux-ci étant déterminés par le calcul

suivant :

(IV,16)

$$p_k = [M_{k-1}^T M_{k-1}]^{-1} M_{k-1}^T v_{k-1}$$

avec :

$$p^T = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0]$$

M_{k-1} = matrice $n \times (n+1)$, n étant donné $\geq n+1$

v_{k-1} = vecteur colonne à n composantes

M_{k-1} et v_{k-1} étant composés des valeurs de y_k et de u_k aux instants $kT, (k-1)T, \dots$

La commande u_k peut être calculée à partir des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0$ identifiés de la façon suivante :

- lorsque l'indice de coût se présente sous la forme particulière donnée par la relation (IV,8), on procède comme au précédent paragraphe (§ IV,1.2), à partir de $y^1, y^2, \dots, y^{2n}$ que l'on calcule par les relations approchées suivantes (cf. chapitre II, § II,2.2) :

(IV,17)

$$y^i \approx y^i(0, \dots, 0, T) + \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{\partial y^i}{\partial (a_j T)} \right]_0 a_j T + \left[\frac{\partial y^i}{\partial (b_0 T)} \right] b_0 T \quad i=1, 2, \dots, 2n$$

- lorsque l'indice de coût se présente sous la forme générale (IV,3), on pourrait calculer F_k et G_k par les relations approchées, définies au chapitre I (§ I,2) :

$$F = I + AT + \dots$$

$$G = A^{-1} [e^{AT} - I] B = BT + \frac{ABT^2}{2!} + \dots$$

la commande sous optimale u_k est alors déterminée par les relations (IV,4) et (IV,5). Notons que la valeur de x_k , nécessaire pour calculer u_k , pourrait être déterminée, comme pour y_k au § IV,1.2, soit à partir de l'état antérieur x_{k-1} par la relation (IV,2), soit par des relations analogues aux relations (IV,14) et (IV,15).

IV,2 - Exemple

IV,2.1 - Rappel des données

Reprenons l'exemple de la stabilisation en tangage du premier étage d'une fusée-sonde définie au chapitre I (§ I,3) et dont l'équation d'évolution simplifiée est :

(IV,18)

$$\ddot{\theta} + b(t) \dot{\theta} + a(t) \theta = c(t) u$$

les courbes de variation des coefficients a , b , c représentées dans les figures I,1 et I,2 (chapitre I) permettent de simuler l'évolution réelle de la fusée.

On suppose que le calculateur d'auto-adaptation ne connaît que les données suivantes :

- l'écart angulaire θ de la fusée par rapport à sa trajectoire nominale, prélevé aux instants discrets de période constante T que nous fixons, dans cet exemple, égale à 0,1 seconde ;
- les caractéristiques au départ de la fusée ; nous ne formulerons aucune hypothèse quant à l'évolution de ces caractéristiques.

Pour déterminer la commande sous-optimale, on adopte l'indice de coût déjà utilisé au précédent chapitre :

(IV,19)

$$\frac{J}{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (\theta_k^2 + \lambda u_k^2) + \frac{1}{2} \theta_N^2$$

Les organigrammes des calculs effectués par le dispositif numérique utilisant les méthodes "exacte" et "approchée" sont représentés dans les figures IV,2 et IV,3, où l'initialisation du processus d'identification est également indiquée.

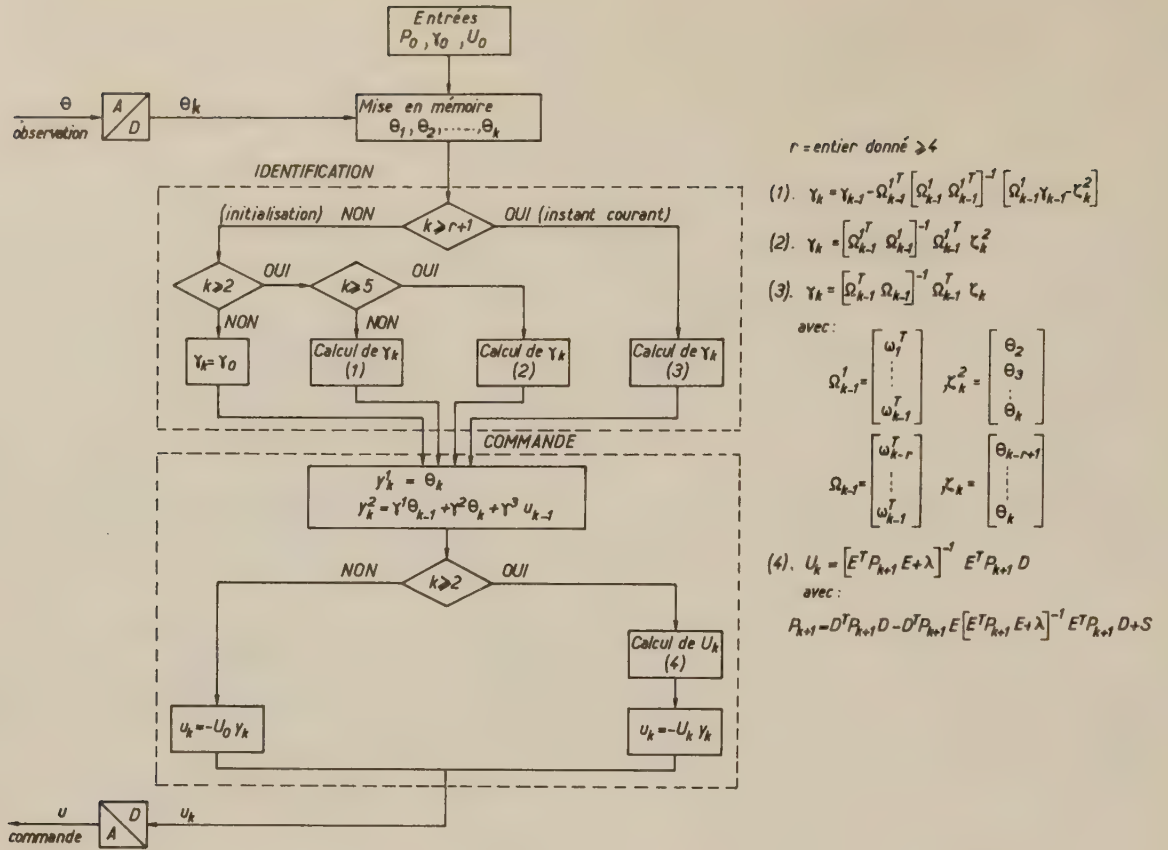


FIGURE IV,2 - Organigramme du calcul de la commande auto-adaptative (Méthode "exacte")

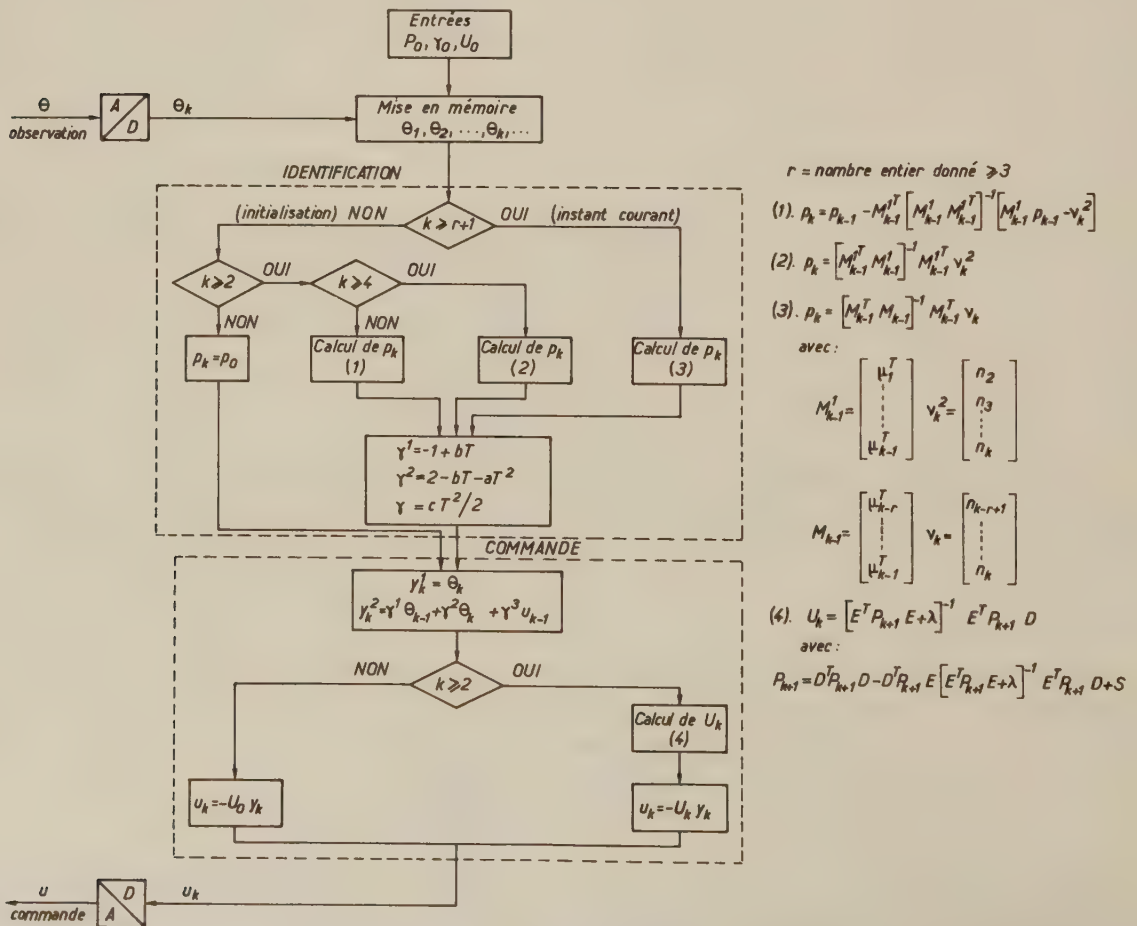


FIGURE IV,3 - Organigramme du calcul de la commande auto-adaptative (Méthode "approchée")

Avant d'effectuer l'auto-adaptation de la fusée réelle où les coefficients de l'équation d'évolution (IV,18) sont variables, examinons d'abord la possibilité d'un éventuel couplage entre l'identification et la commande dans la boucle d'auto-adaptation, en appliquant les méthodes précédentes à une fusée fictive dont l'évolution est régie par une équation du second ordre stationnaire.

IV,2.2 - Elimination d'un éventuel couplage de la boucle d'auto-adaptation

IV,2.2.1 - Application de la méthode "exacte" à un système stationnaire

Bien que l'auto-adaptation présentée dans cette étude soit conçue pour un système essentiellement non stationnaire, les calculs d'identification sont effectués comme si le système était réellement stationnaire, on devrait donc s'attendre à obtenir une auto-adaptation correcte lorsque le système à commander était effectivement stationnaire.

On va montrer qu'une précaution doit cependant être prise pour qu'il en soit ainsi.

Traitons, par exemple, l'auto-adaptation d'une fusée fictive d'équation stationnaire :

(IV,20)

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + a\theta = cu$$

où les coefficients constants a , b , c correspondent aux caractéristiques de la fusée réelle figées à un certain instant de vol.

Rappelons l'équation récurrente correspondante :

(IV,21)

$$\theta_{k+1} = \gamma^1 \theta_{k-1} + \gamma^2 \theta_k + \gamma^3 u_{k-1} + \gamma^4 u_k$$

Pour l'identification du vecteur $\gamma (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4)$, on a supposé que la matrice carrée $\Omega^T \Omega$ de dimension (4×4) (relation IV,7) était inversible. Montrons que si, pendant une certaine période, le système est parfaitement identifié, l'application de la commande sous-optimale auto-adaptative rendra cette matrice singulière, d'où une détérioration ultérieure de l'identification.

A l'instant kT , la commande sous-optimale est de la forme :

$$u_k = -v^1 y_k^1 - v^2 y_k^2$$

v^1 , v^2 étant constants (et dont les valeurs dépendent de $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$).

Le vecteur y_k est déterminé par les relations : (cf. relations IV,14 et IV,15)

$$y_k = D \begin{bmatrix} \theta_{k-1} \\ \theta_k - c^1 u_{k-1} \end{bmatrix} + E u_{k-1}$$

Soit :

$$\begin{cases} y_k^1 = \theta_k \\ y_k^2 = d^1 \theta_{k-1} + d^2 \theta_k + (e^2 - d^2 c^1) u_{k-1} \end{cases}$$

la composante y_k^2 s'écrit encore, si l'on fait intervenir les coefficients $\gamma^1, \dots, \gamma^4$ (d'après chapitre I, § I,3) :

$$y_k^2 = \gamma^1 \theta_{k-1} + \gamma^2 \theta_k + \gamma^3 u_{k-1}$$

La commande sous optimale u_k s'écrit donc :

$$u_k = (-v^2 \gamma^1) \theta_{k-1} + (-v^1 - v^2 \gamma^2) \theta_k - v^2 \gamma^3 u_{k-1}$$

elle est de la forme :

(IV,22)

$$u_k = \alpha^1 \theta_{k-1} + \alpha^2 \theta_k + \alpha^3 u_{k-1}$$

Lorsque le système est déjà exactement identifié, les coefficients $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ sont constants, la commande sous-optimale u_k vérifie donc une condition de singularité de la matrice $\Omega^T \Omega$ donnée par la relation (IV,22) et qui est déjà énoncée au chapitre II (remarque du § II,1.3).

On peut cependant éliminer cet inconvénient sans que les performances du système en soient

affectées. Il suffit de supprimer le calcul d'identification lorsque les paramètres identifiés à l'instant précédent sont encore satisfaisants à l'instant actuel. On peut appliquer l'une des méthodes suivantes :

- 1°) - avant d'identifier la valeur de γ_k relative à l'instant kT , on calcule d'abord le critère d'identification pour la valeur antérieure γ_{k-1} :

$$\mathcal{E}(\gamma_{k-1}) = \sum_{j=k-2}^{k-1} (\gamma_{j+1} - \omega_j^T \gamma_{k-1})^2$$

$\mathcal{E}(\gamma)$ étant nul (en l'absence d'erreurs dues au processus numérique) lorsque γ est égal au vecteur paramètre du système, on calcule γ_k par la relation (IV,7) quand $\mathcal{E}(\gamma_{k-1})$ est supérieure à une certaine valeur fixée, sinon la valeur antérieure est jugée bonne et l'on prend : $\gamma_k = \gamma_{k-1}$;

- 2°) - remarquons que la relation d'identification (IV,7) peut encore s'écrire (d'après les résultats de l'Annexe II) :

$$\gamma_k = \gamma_{k-1} + [\Omega_{k-1}^T \Omega_{k-1}]^{-1} \left[\sum_{j=k-2}^{k-1} (\gamma_{j+1} - \omega_j^T \gamma_{k-1}) \omega_j \right]$$

où γ_{k-1} est la valeur identifiée à l'instant $(k-1)T$.

On calcule d'abord le gradient du critère d'identification qui s'écrit :

$$\sum_{j=k-2}^{k-1} (\gamma_{j+1} - \omega_j^T \gamma_{k-1}) \omega_j$$

et en remarquant que ce gradient s'annule pour $\gamma_{k-1} = \gamma_s$, γ_s étant le vecteur paramètre réel du système (IV,21), on poursuit le calcul d'identification seulement si le module du gradient est supérieur à une valeur fixée, sinon on prend : $\gamma_k = \gamma_{k-1}$.

On a représenté sur la figure (IV,4) la réponse du système stationnaire, correspondant aux caractéristiques de la fusée figées à 15 secondes, soumis à un écart en assiette angulaire et où le calcul du critère $\mathcal{E}(\gamma_{k-1})$ est appliqué. On vérifie que l'auto-adaptation est bien effectuée, on obtient le résultat suivant, concernant l'identification de γ_k : lorsque le processus d'initialisation est achevé les coefficients $\gamma^1, \dots, \gamma^4$ sont exactement identifiés (aux erreurs dues aux calculs numériques près), le calcul d'identification est ensuite supprimé ($\mathcal{E}(\gamma)$ prenant alors des valeurs très faibles, de l'ordre de la précision du calcul numérique) et ces valeurs identifiées de $\gamma^1, \dots, \gamma^4$ sont utilisées dans la suite pour déterminer la commande sous-optimale.

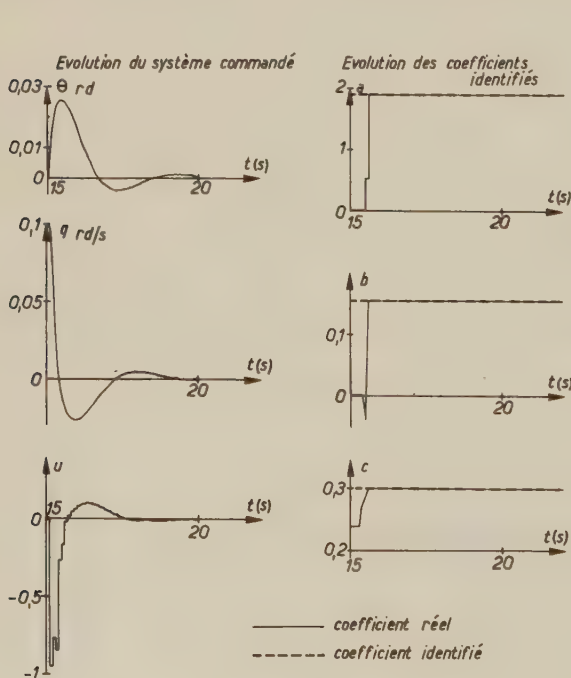


FIGURE IV,4 -

Auto-adaptation d'un système stationnaire

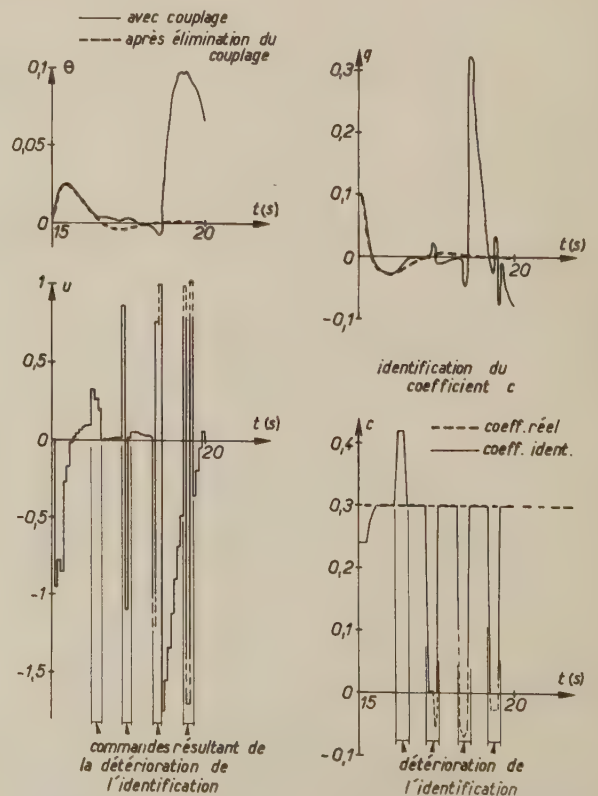


FIGURE IV,5 - Mise en évidence du couplage entre l'identification et la commande

Remarques :

1°) - Pour mettre en évidence le couplage de la boucle d'auto-adaptation, nous avons indiqué dans la figure (IV,5) le comportement du même système soumis à la même perturbation lorsque l'identification est effectuée comme si la matrice $\Omega^T \Omega$ était toujours inversible. On obtient le résultat suivant :

- le processus d'identification s'effectue d'abord correctement et les valeurs exactes pour $\gamma^1, \dots, \gamma^4$ sont obtenues à la fin de l'initialisation. Après une certaine période d'identification correcte, on observe une détérioration des coefficients $\gamma^1, \dots, \gamma^4$ identifiés, ceux-ci prenant des valeurs arbitraires (l'inversion numérique de $\Omega^T \Omega$ peut encore s'effectuer car la valeur du déterminant de $\Omega^T \Omega$ est très faible mais non nulle, à cause des erreurs inhérentes au calcul numérique) .
- il réapparaît ensuite une période où les coefficients $\gamma^1, \dots, \gamma^4$ sont à nouveau bien identifiés. Ceci est dû au fait suivant : la commande sous-optimale calculée en fonction des coefficients $\gamma^1, \dots, \gamma^4$ faussement identifiés modifie les valeurs des coefficients de proportionnalité $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ de la relation (IV,22) entre $u_{k+1}, u_k, \theta_{k+1}, \theta_k$ et supprime, par conséquent, la proportionnalité des vecteurs colonnes de la matrice Ω . Celle-ci devient alors inversible et l'identification redevient correcte ;
- le processus se renouvelle et on observe une période de bonne identification suivie d'une période de mauvaise identification.

Le couplage entre l'identification et la commande sous-optimale est ainsi mis en évidence dans l'auto-adaptation d'un système stationnaire par la méthode "exacte". Remarquons encore que ce couplage pénalise fortement les performances du système.

2°) - Pour éliminer ce phénomène de couplage nous avons choisi de supprimer l'identification du système lorsque le critère d'identification a une valeur trop faible. On pourrait aussi adopter une méthode différente, basée sur la remarque précédente, qui consisterait à perturber périodiquement la commande sous-optimale calculée (en modifiant par exemple les valeurs des coefficients $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ de la relation (IV,22) de façon que la matrice $\Omega^T \Omega$ soit toujours inversible. Cependant la commande ainsi perturbée devrait être choisie telle que les performances du système n'en soient pas trop affectées.

IV,2.2.2 - Application de la méthode "approchée" à un système stationnaire

On montre maintenant que l'auto-adaptation d'un système stationnaire par la méthode "approchée" pourrait aussi conduire à une détérioration des performances du système due à un couplage entre l'identification et la commande sous-optimale. Cependant, on le verra dans un exemple, à cause de l'erreur résultant de l'identification approximative de a, b, c , ce couplage reste dans des limites très acceptables.

Considérons le même exemple qu'au § IV,2.2.1 de l'auto-adaptation d'une fusée fictive dont l'équation stationnaire est donnée par la relation (IV,20).

Rappelons la forme de la matrice M (cf. chapitre II, § II,3) :

$$M_{k+2} = \begin{bmatrix} -\theta_k, (\theta_k - \theta_{k+1})/T, \frac{1}{2}(u_k + u_{k+1}) \\ -\theta_{k+1}, (\theta_{k+1} - \theta_{k+2})/T, \frac{1}{2}(u_{k+1} + u_{k+2}) \\ \dots \\ -\theta_{k+1}, (\theta_{k+2} - \theta_{k+3})/T, \frac{1}{2}(u_{k+2} + u_{k+3}) \end{bmatrix}$$

Montrons que si le système est parfaitement identifié pendant une certaine période, l'application de la commande sous optimale correspondante rendra la matrice M singulière.

Pour cela, il suffit de montrer, comme précédemment, que l'on a une combinaison linéaire de la forme suivante entre les éléments u_k, u_{k+1}, θ_k et θ_{k+1} :

(IV,23) $u_k + u_{k+1} = \beta^1 \theta_k + \beta^2 \theta_{k+1}$

où β^1 et β^2 sont des constantes.

Donnons d'abord une relation linéaire liant la commande sous-optimale u_k uniquement aux observations θ_k et θ_{k+1} .

L'équation récurrente (IV,21) peut s'exprimer en fonction de y_k^2 :

$$\theta_{k+1} = y_k^2 + \gamma^4 u_k$$

D'où la relation linéaire en θ_k, θ_{k+1} et u_k , obtenue en éliminant y_k^2 de cette relation et de l'expression donnant u_k :

$$(IV,24) \quad v^2 \theta_{k+1} = -v^4 \theta_k - (1 - \gamma^4 v^2) u_k$$

D'autre part, à l'instant $(k+1)T$, la commande sous-optimale s'écrit : (cf. expression donnée au § IV,2.2.1)

$$u_{k+1} = (-v^2 \gamma^4) \theta_k + (-v^4 - \gamma^2 v^2) \theta_{k+1} - v^2 \gamma^3 u_k$$

En combinant ces deux dernières relations, on obtient bien une relation linéaire en $\theta_k, \theta_{k+1}, u_k, u_{k+1}$ dont la forme est indiquée par la relation (IV,23). L'application d'une commande sous-optimale correspondant aux caractéristiques exactes du système entraînera donc une singularité de la matrice $M^T M$.

Mais cette singularité n'interviendrait que si les coefficients a, b, c étaient exactement identifiés, ce qui n'est probablement pas le cas ici, étant donné le caractère approximatif de la méthode.

On a reporté dans la figure (IV,6) les résultats relatifs à l'auto-adaptation d'un système stationnaire où l'identification est effectuée à chaque étape de calcul.

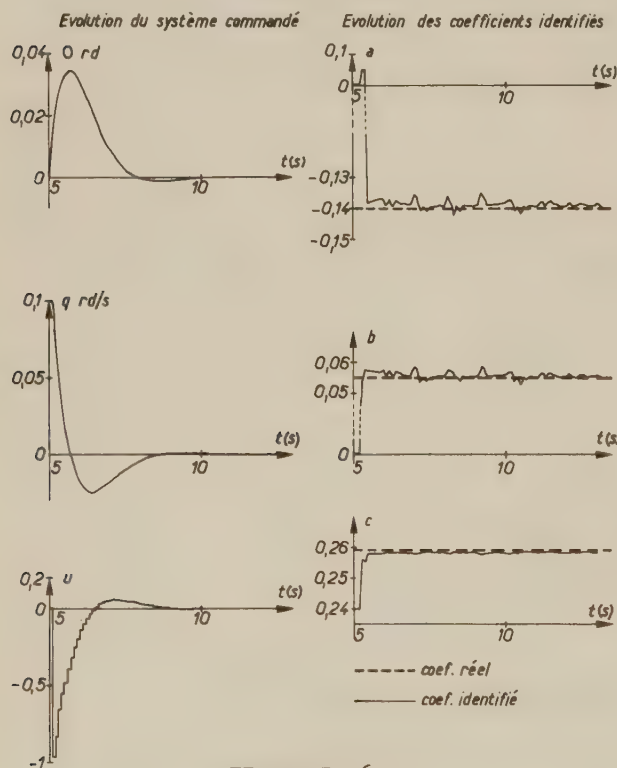


FIGURE IV,6 -

Auto-adaptation d'un système stationnaire (méthode approchée)

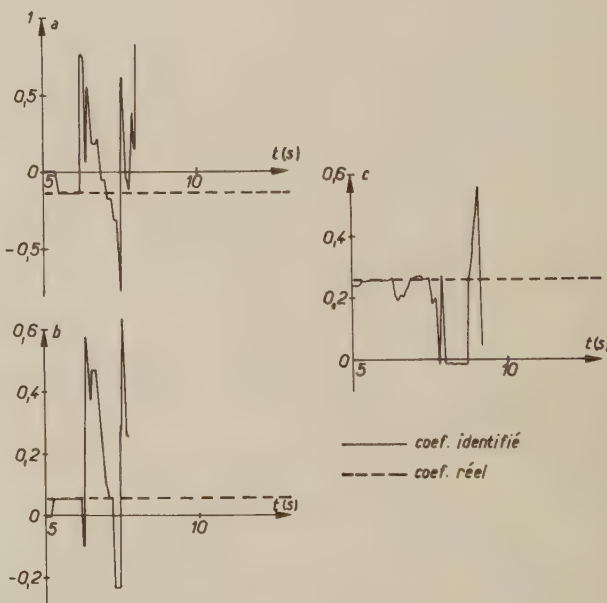


FIGURE IV,7 -

Identification d'un système stationnaire muni de la commande sous-optimale

Comme il a été prévu, on n'observe aucune détérioration de l'identification : les coefficients a, b, c sont identifiés de façon approchée, mais sans erreurs importantes, durant toute la séquence de vol. La perte de coût qui en résulte par rapport au même système (soumis à la même perturbation) commandé par une loi sous-optimale exacte (c'est-à-dire correspondant aux caractéristiques exactes du système) demeure inférieure à 0,1 %. Les performances du système stationnaire muni de la commande auto-adaptative utilisant la méthode "approchée" sont donc satisfaisantes.

Remarque :

Pour vérifier la détérioration de l'identification prévue dans le cas d'une commande sous-optimale exacte (c'est-à-dire correspondant aux coefficients exacts), on a effectué l'identification

du système stationnaire par la méthode "approchée", celui-ci étant muni de cette loi sous-optimale exacte (sauf durant la première phase de l'initialisation). La figure IV,7 représente les différentes courbes correspondantes, on obtient le résultat suivant : lorsque dans la matrice M figurent les valeurs de μ_k correspondantes à la commande sous-optimale exacte, on observe bien une détérioration des coefficients identifiés ; on vérifie qu'elle est effectivement due à la singularité de la matrice M . Ce qui confirme le résultat théorique annoncé.

IV,2.3 - Auto-adaptation du système non-stationnaire

Pour simuler l'auto-adaptation du système non-stationnaire, la méthode "approchée" est utilisée pour les raisons suivantes :

- 1°) - les calculs d'identification sont plus simples. En effet, par la méthode "approchée", l'identification nécessite l'inversion d'une matrice d'ordre 3, alors que par la méthode "exacte" il faudra inverser une matrice d'ordre 4 ;
- 2°) - les résultats obtenus sont suffisants pour l'auto-adaptation numérique de la commande du système.

La simulation est réalisée dans les conditions suivantes :

- comme pour l'identification des coefficients a , b , c effectuée au chapitre II (§ II,3), un lissage linéaire de cinq dernières valeurs identifiées de a , b , c est effectué en vue de réduire les oscillations de ces coefficients identifiés ; on suppose, d'autre part, connu le signe du coefficient b relatif à l'amortissement aérodynamique de la fusée (lorsque la valeur identifiée de b devient négative, ce qui peut arriver effectivement car la valeur réelle de ce coefficient est inférieure à 0,2, on prend $b = 0$) ;
- le coefficient de pondération λ de l'indice de performance (cf. relation IV,19) est fixé à la valeur 0,01. D'après les résultats du chapitre III, cette valeur fournit en effet une bonne précision du système ;
- la résolution de l'équation matricielle en P_{k+1} intervenant dans le calcul de μ_k est effectuée par l'algorithme à convergence quadratique ; les dispositions indiquées au chapitre III (§ III,3.3) sont prises pour assurer la convergence de l'algorithme et réduire le nombre d'itérations ;
- enfin, on a également tenu compte du temps de calcul mis par le dispositif numérique d'auto-adaptation. Ce temps est cependant supposé arbitrairement inférieur ou égal à une période d'échantillonnage. Toutefois, au début de l'initialisation du processus d'identification où la commande est simple à mettre en oeuvre, il est négligé (dans cette phase la commande est calculée à partir des valeurs initiales données : U_0 , γ_0).

La structure auto-adaptative est testée par la réponse de la fusée à un écart en assiette ou en vitesse angulaire d'amplitude donnée, survenant aux différents instants de vol (0,5, 10, 15 secondes).

Deux simulations sont envisagées.

Dans la première, les valeurs initiales p_0, γ_0, U_0 introduites dans le calculateur d'auto-adaptation correspondent aux caractéristiques réelles de la fusée à l'instant d'application de la perturbation. Ceci correspondrait en pratique au cas où, à cet instant, les caractéristiques de la fusée seraient bien connues. Les résultats sont reportés dans les figures IV,8 et IV,9. Les coefficients a , b , c identifiés présentent des allures analogues à celles indiquées dans la figure II,5 du chapitre II. Le comportement de la boucle d'adaptation se révèle satisfaisant, la réponse de la fusée est rapide.

Une deuxième simulation est ensuite effectuée avec des valeurs initiales p_0, γ_0, U_0 correspondant aux caractéristiques de la fusée au départ. Ce cas se produira lorsque la première perturbation détectée se trouvera à l'un des instants 0, 5, 10 ou 15 secondes. Par cette simulation le fonctionnement du calculateur d'auto-adaptation s'effectue dans des conditions défavorables. Les différentes courbes de réponse de la fusée sont représentées dans les figures IV,10 et IV,11.

Nous constatons que la stabilisation de la fusée est bien assurée dans tous les cas considérés.

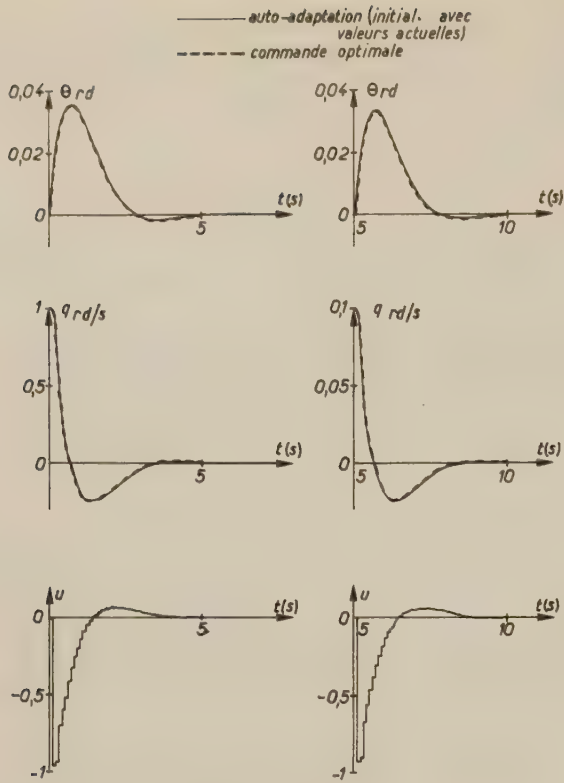


FIGURE IV,8 -

Réponses à un écart en vitesse angulaire

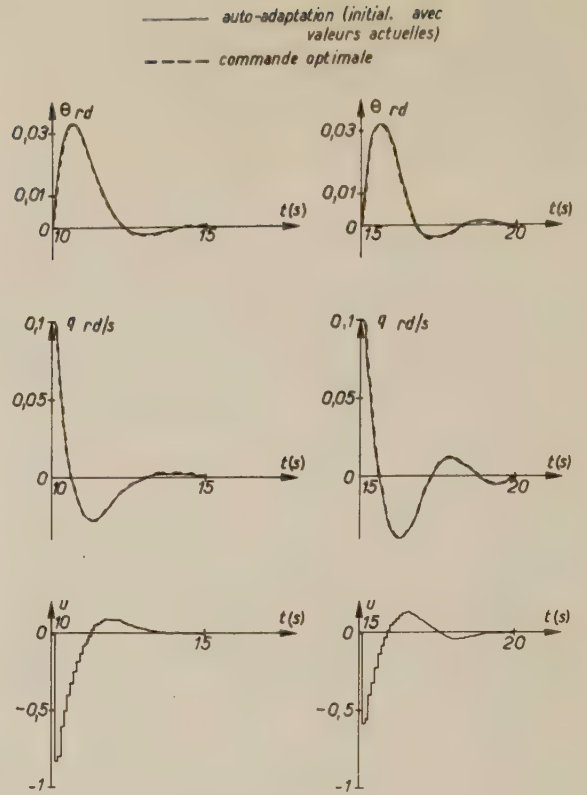


FIGURE IV,9 -

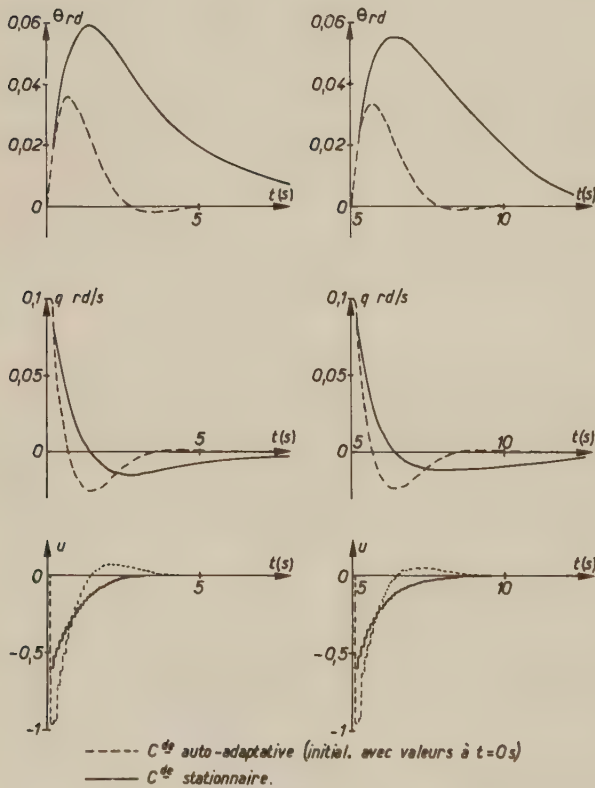


FIGURE IV,10 -

Réponses à un écart en vitesse angulaire

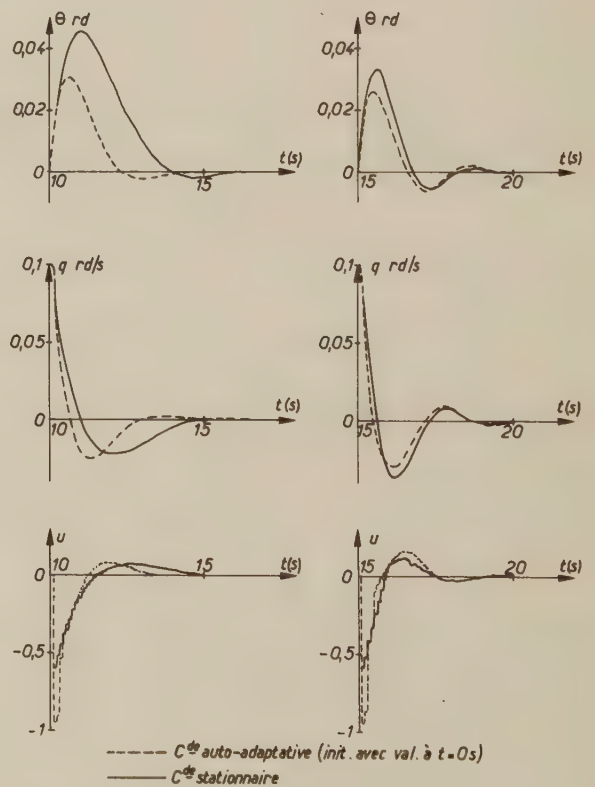


FIGURE IV,11 -

IV,2.4 - Comparaison avec le cas du système muni de deux commandes particulières

Au paragraphe précédent, on a constaté d'une manière qualitative le bon comportement de la structure auto-adaptative en dépit des variations des paramètres du système.

Pour justifier la validité de la solution adoptée, comparons les performances du système auto-adapté à celles du système muni de deux commandes particulières définies ainsi :

- 1°) - on considère d'abord le système muni de la commande optimale obtenue dans le cas idéal où l'évolution des coefficients est complètement connue à l'avance ;
- 2°) - pour mettre en évidence l'intérêt de l'utilisation d'une commande auto-adaptative, considérons le système muni d'une commande définie comme suit : on choisit la loi qui serait optimale pour le système stationnaire du second ordre dont les coefficients ont approximativement les valeurs moyennes de ceux de la fusée pendant le vol considéré (les valeurs prises pour ces coefficients sont : $a = 2$; $b = 0,1$; $c = 0,25$).

La comparaison des performances relatives aux différentes commandes est effectuée par les réponses du système soumis à un même écart en assiette ou en vitesse angulaire d'amplitude donnée.

Les différentes courbes sont reportées dans les figures IV,10 à IV,13. Les pertes de performances du système muni de la commande auto-adaptative, puis de la commande stationnaire, par rapport au système optimal sont ensuite représentées dans le tableau IV,1.

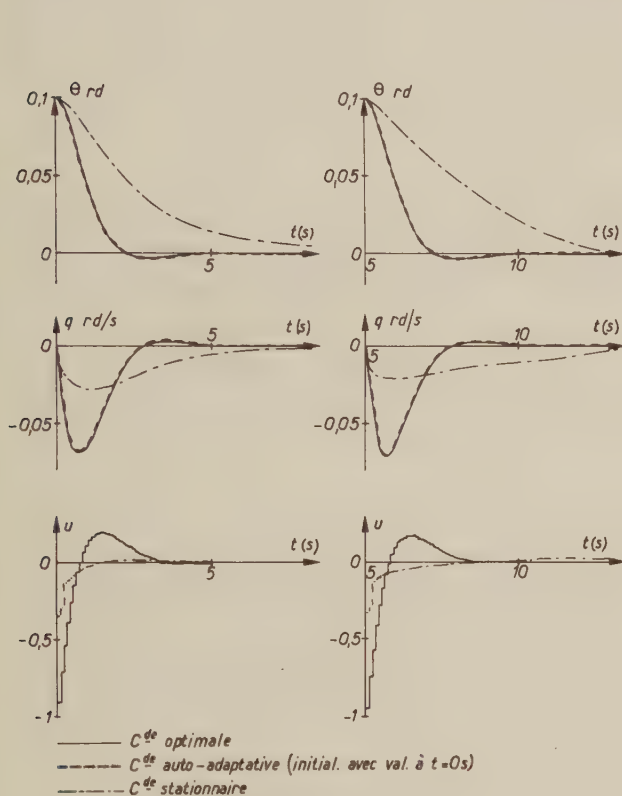


FIGURE IV,12 -

Réponses à un écart en assiette angulaire

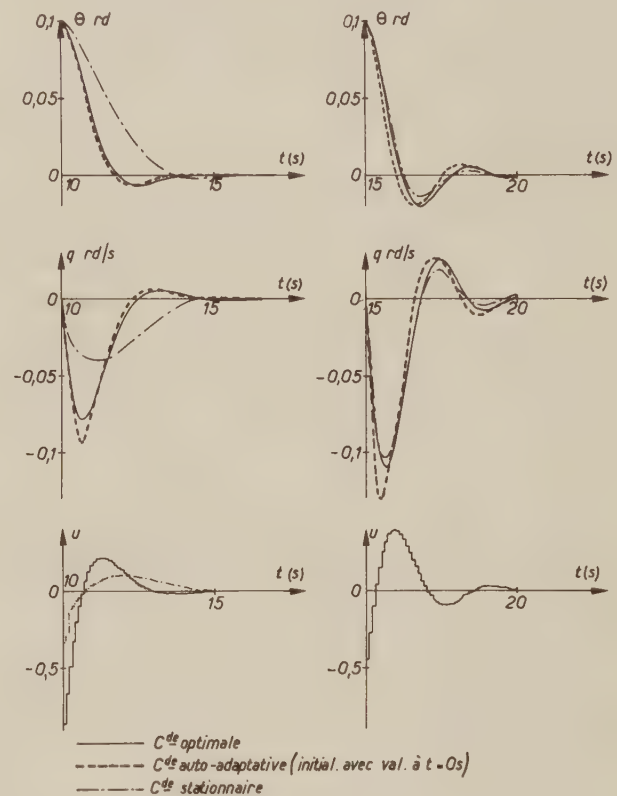


FIGURE IV,13 -

De ces résultats on peut déduire les remarques suivantes :

- quand l'initialisation est effectuée à partir des valeurs exactes des paramètres, l'auto-adaptation numérique fournit des performances voisines de celles du système optimal. La perte de performances est inférieure à 1 % pour les cas considérés. On vérifie ainsi que l'identification approximative des coefficients a , b , c se trouve nettement suffisante pour le calcul de la commande sous-optimale du système ;
- quand l'initialisation est effectuée à partir des valeurs correspondant aux caractéristiques au départ de la fusée (et non plus aux caractéristiques actuelles), la perte de performances par rapport au système optimal reste faible dans la première moitié du vol (inférieure à 4 %), elle peut devenir assez importante pour une perturbation survenue dans la dernière phase de vol pilotée (elle atteint 20 % pour une percussio angulaire survenue à la quinzième seconde de vol). La grande influence de l'initialisation des paramètres du système sur ses performances est mise en évidence sur cet exemple ;
- avec la commande stationnaire, les performances sont bonnes pour une perturbation survenue à l'instant 15 secondes. Ceci est dû au fait que, aux environs de cet instant, la valeur réelle des paramètres ne s'éloigne pas trop de la valeur moyenne adoptée pour le système stationnaire fictif. Pour des perturbations survenues dans la première moitié du vol, la stabilisation de la fusée est encore assurée, mais la réponse est lente. Les performances correspondantes sont mauvaises. On vérifie ainsi qu'une loi de commande stationnaire, calculée avec les valeurs moyennes des caractéristiques, ne permet pas d'obtenir de bonnes performances dans la totalité du domaine de variation des paramètres.

TABLEAU IV,1
PERFORMANCES COMPARÉES DE LA FUSÉE MUNIE DE DIFFÉRENTES
LOIS DE COMMANDE

Réponse à un écart en assiette angulaire
($\theta = 0,1 \text{ rd}$; $\dot{q} = 0 \text{ rd/s}$)

Ecart existant à l'instant (en s.)	0	5	10	15
$\Delta J_1^{ad}/J^*$ en %	0,3	0,2	0,45	0,8
$\Delta J_2^{ad}/J^*$ en %	0,3	0,2	4	9,5
$\Delta J^{st}/J^*$ en %	85	120	40	2

Réponse à un écart en vitesse angulaire
($\theta = 0 \text{ rd}$; $\dot{q} = 0,1 \text{ rd/s}$)

Ecart existant à l'instant (en s.)	0	5	10	15
$\Delta J_1^{ad}/J^*$ en %	0,04	0,25	1,5	1
$\Delta J_2^{ad}/J^*$ en %	0,04	0,25	2	20
$\Delta J^{st}/J^*$ en %	130	145	34	1

NOTATIONS :

- $\Delta J^{ad}/J^*$: perte relative de performances du système muni de la commande auto-adaptative par rapport au système optimal,
 $\Delta J_1^{ad}/J^*$ correspondant à l'initialisation avec des caractéristiques actuelles ;
 $\Delta J_2^{ad}/J^*$ correspondant à l'initialisation avec les caractéristiques de la fusée au départ.
 $\Delta J^{st}/J^*$: perte relative de performances du système muni de la commande stationnaire par rapport au système optimal.

IV,2.5 - Estimation du temps d'exécution

L'application pratique de la méthode d'auto-adaptation présentée dans cette étude est directement liée aux possibilités offertes par les calculateurs numériques embarqués existants. Une estimation approximative du temps d'exécution est effectuée en Annexe 6 pour l'exemple du second ordre, on utilise la méthode qui consiste à évaluer le nombre d'opérations élémentaires à effectuer par le calculateur.

Si l'on envisage par exemple un calculateur embarqué de la période 1968 de caractéristiques suivantes [2] :

- temps d'addition : 4 à 9 μs
- temps de multiplication : 20 à 40 μs
- poids : 9 à 22,5 kg
- encombrement : 5,4 à 19,5 litres
- puissance : 50 à 200 watts

le temps total d'exécution pour l'élaboration de la commande à partir des observations (pour l'exemple considéré) est comprise entre 17 et 35 ms. Ce temps demeure très inférieur à la période d'échantillonnage de 0,1 seconde choisie pour cet exemple.

9

CONCLUSION

Dans cette étude, en vue d'effectuer l'auto-adaptation d'un système linéaire, on a d'abord traité séparément l'identification et la loi de commande du système.

La méthode classique des moindres carrés a pu être appliquée à l'identification des paramètres du système linéaire, d'abord dans le cas stationnaire, puis étendue au cas non stationnaire, même quand les composantes de l'état du système ne sont pas toutes observées ; ce dernier point constitue une des particularités de l'étude. Il a été vérifié sur un système du second ordre stationnaire que la méthode fournit les résultats escomptés. Pour l'identification des coefficients d'un système non stationnaire (décrivant l'évolution en tangage d'une fusée-sonde), les résultats obtenus sont approchés, mais, comme on le voit plus loin, suffisants pour l'auto-adaptation.

En ce qui concerne l'optimisation de la commande, on choisit pour indice de performance à minimiser une fonction quadratique de l'état et de la commande. La loi de commande optimale, impossible à utiliser dans un contexte d'auto-adaptation, est remplacée par une loi sous-optimale ; ce choix constitue une autre particularité de l'étude. Dans l'exemple du système du second ordre avec des coefficients évolutifs, on constate que la perte de performances du système muni de la commande sous-optimale par rapport au système optimal demeure très faible, surtout si l'on adopte un coefficient de pondération de l'indice de coût permettant d'assurer une bonne précision du système.

Une méthode d'auto-adaptation numérique est ensuite indiquée, utilisant à la fois les résultats relatifs à l'identification et à la commande. L'application à un système du second ordre stationnaire a permis de mettre en évidence, puis d'éliminer, un éventuel couplage entre l'identification et la commande du système. Un exemple de système du second ordre (stabilisation en tangage d'une fusée-sonde) est ensuite traité. On peut en dégager les remarques suivantes :

- le comportement du système muni de la commande auto-adaptative se révèle satisfaisant dans les différentes configurations envisagées. Les performances sont sensiblement voisines de celles du système muni de la loi optimale (où l'on suppose connue l'évolution des coefficients) surtout si, au moment du déclenchement du processus d'identification, les coefficients sont connus. Même dans le cas où cette dernière condition n'est pas vérifiée, la stabilisation correcte du système est encore assurée ;
- bien que le volume des calculs soit important, notamment en ce qui concerne l'élaboration de la commande, un ordinateur numérique embarqué existant peut être envisagé pour l'exemple considéré, car le temps de calcul pour un tel ordinateur demeure faible.

En vue d'une application effective sur une fusée de la commande auto-adaptative dont la supériorité par rapport à une commande classique est incontestable, comme on a pu le constater sur l'exemple, il reste à étudier son comportement dans des contextes qui débordent le cadre de cette étude. Il faudra, en particulier, envisager le cas d'un modèle non conforme à la structure réelle du système à commander et également tenir compte des perturbations de caractère aléatoire pouvant affecter l'évolution et l'observation du système.



ANNEXE I

ÉQUATION RÉCURRENTÉ D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

I,1 - Commandabilité, observabilité

Définitions [4]

Un système est dit commandable si, quels que soient un instant quelconque t_0 et deux états x_0 et x_1 donnés, on peut trouver un instant t_1 ($t_1 \geq t_0$) et une commande admissible $u(t)$ transférant le système de l'état x_0 à l'instant t_0 à l'état x_1 à l'instant t_1 .

De même on dit qu'un système est observable si, quel que soit un instant quelconque t_0 , on peut trouver un instant t_1 ($t_1 \geq t_0$) tel que l'observation de $z(t)$ et la connaissance de la commande sur l'intervalle (t_0, t_1) permettent de déterminer l'état initial x_0 .

Propriétés

Soit le système à temps discret :

(I,1)

$$\begin{cases} x_{k+1} = Fx_k + Gu_k \\ z_k = Cx_k \end{cases}$$

Lorsque le système est commandable la matrice :

$$[G, FG, \dots, F^{n-1}G]$$

est de rang n .

De même, lorsque le système est observable, la matrice :

$$[C^T, F^T C^T, \dots, F^{n-1} C^T]$$

est de rang n .

I,2 - Equation récurrente d'un système linéaire

Considérons un changement de base dans l'espace d'état x qui permet d'écrire le système (I,1) sous la forme d'une équation reliant les observations z_i aux entrées u_i .

Soit :

$$y_k = Mx_k$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CF \\ \vdots \\ CF^{l-1} \end{bmatrix}$$

où l est un nombre entier ($l = n/p$, n est la dimension de l'état x , p la dimension de l'observation z). On suppose que la matrice M est inversible.

Le système (I,1) devient :

(I,2)

$$\begin{cases} y_{k+1} = MFM^{-1}y_k + MG u_k \\ z_k = CM^{-1}y_k \end{cases}$$

Montrons que les matrices MFM^{-1} et CM^{-1} prennent une forme particulière.

Posons :

$$M^{-1} = [N_1, N_2, \dots, N_l]$$

les N_i étant des matrices rectangles $n \times p$. En sachant que : $MM^{-1} = I$ les matrices

$N_1, N_2, \dots, N_\ell$ doivent vérifier les relations :

$$(I,3) \quad \begin{cases} CF^i N_{i+1} = I_p & i = 0, 1, \dots, \ell-1 \\ CF^i N_j = 0 & \forall j \neq i+1 \end{cases}$$

où I_p est la matrice unité de dimension $p \times p$.

Comme la matrice MFM^{-1} s'écrit encore :

$$MFM^{-1} = \begin{bmatrix} CFN_1, CFN_2, \dots, CFN_\ell \\ CF^2N_1, CF^2N_2, \dots, CF^2N_\ell \\ \dots \\ CF^\ell N_1, CF^\ell N_2, \dots, CF^\ell N_\ell \end{bmatrix}$$

en tenant compte des relations (I,3), elle devient :

$$MFM^{-1} = \begin{bmatrix} 0, I_p, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, I_p, \dots, 0 \\ \dots \\ CF^\ell N_1, CF^\ell N_2, \dots, CF^\ell N_\ell \end{bmatrix}$$

On a, d'autre part :

$$CM^{-1} = [CN_1, CN_2, \dots, CN_\ell]$$

soit encore, en tenant compte des relations (I,3) :

$$CM^{-1} = [I_p, 0, \dots, 0]$$

Etablissons maintenant une relation récurrente entre les z_i et les u_i en éliminant y_i de l'équation (I,2).

Posons auparavant :

$$D^i = CF^i N_i = \text{matrice carrée } p \times p$$

$$E = MG$$

$$E^T = [E^{1T}, E^{2T}, \dots, E^{\ell T}]$$

où les E^{iT} sont des vecteurs lignes $1 \times p$.

On a :

$$z_{k+1} = [I_p, 0, \dots, 0] y_{k+1} = [0, I_p, 0, \dots, 0] y_k + E^1 u_k$$

de même :

$$z_{k+i} = [0, \dots, I_p, \dots, 0] y_k + E^{i-1} u_k + E^{i-2} u_{k+1} + \dots + E^1 u_{k+i-2}$$

Ecrivons ℓ équations de ce type sous la forme matricielle suivante :

$$(I,4) \quad \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k+1} \\ \vdots \\ z_{k+\ell-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & & & I_p \end{bmatrix} y_k + \begin{bmatrix} 0 \\ E^1 u_k \\ \dots \\ E^{\ell-1} u_k + \dots + E^1 u_{k+\ell-2} \end{bmatrix}$$

En tirant y_k de cette relation et en le portant dans la première équation du système (I,2) on obtient :

$$\begin{bmatrix} z_{k+1} \\ z_{k+2} \\ \dots \\ z_{k+l} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ E^1 u_k \\ \dots \\ E^{l-1} u_{k+1} + \dots + E^l u_{k+l-1} \end{bmatrix} = MFM^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k+1} \\ \dots \\ z_{k+l-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ E^1 u_k \\ \dots \\ E^{l-1} u_k + \dots + E^l u_{k+l-2} \end{bmatrix} \right\} + E u_k$$

Développons cette relation :

$$z_{k+1} = z_{k+1} - E^1 u_k + E^1 u_k$$

$$z_{k+2} - E^1 u_{k+1} = z_{k+2} - E^2 u_k - E^1 u_{k+1} + E^2 u_k$$

....

$$z_{k+l-1} - E^{l-2} u_{k+1} - \dots - E^1 u_{k+l-1} = z_{k+l-1} - E^{l-1} u_k - \dots - E^1 u_{k+l-2} + E^{l-1} u_k$$

$$z_{k+l} - E^{l-1} u_{k+1} - \dots - E^1 u_{k+l-1} = D^1 z_k + \dots + D^l z_{k+l-1} - D^2 E^1 u_k - \dots - D^l (E^{l-1} u_k + \dots + E^1 u_{k+l-2}) + E^l u_k$$

Les $(l-1)$ premières relations sont identiquement vérifiées, elles sont en effet de la forme $z_i = z_i$, $i = k+1, k+2, \dots$

En regroupant les termes de la dernière relation, on obtient l'équation récurrente cherchée :

$$z_{k+l} = D^1 z_k + D^2 z_{k+1} + \dots + D^l z_{k+l-1} + E^1 u_{k+l-1} + (E^2 - D^l E^1) u_{k+l-2} + \dots + (E^{l-i} - D^l E^{l-i-1} - \dots - D^{i+2} E^1) u_{k+i} + \dots + (E^l - D^l E^{l-1} - \dots - D^2 E^1) u_k$$

ANNEXE II

MINIMISATION DU CRITÈRE D'IDENTIFICATION

II,1 - Rappel du critère

Dans le chapitre II, l'identification paramétrique conduit à la minimisation du critère quadratique suivant :

$$(II,1) \quad \mathcal{E} = \|z_h - \Omega_{h-1} \gamma\|^2 = \sum_{j=h-2}^{h-1} (z_{j+1} - \omega_j^T \gamma)^2$$

avec :

$$\Omega_{h-1} = \begin{bmatrix} \omega_{h-2}^T \\ \omega_{h-1}^T \\ \dots \\ \omega_{h-1}^T \end{bmatrix}, \quad z_h = \begin{bmatrix} z_{h-2+1} \\ z_{h-2+2} \\ \dots \\ z_h \end{bmatrix}$$

et γ_i = scalaire
 ω_j = vecteur colonne à $2n$ composantes d'éléments ω_j^i
 Ω_{h-1} = matrice $h \times 2n$, avec $h \geq 2n$.

On rappelle d'abord la solution de la minimisation de $\mathcal{E}$, une écriture différente de cette solution est ensuite donnée par l'application d'une méthode itérative de recherche du minimum d'une fonction. Des interprétations géométriques de ce critère sont enfin considérées.

II,2 - Minimisation du critère quadratique

Pour que la forme quadratique $\mathcal{E}(\gamma)$ soit extrémale, il faut que γ_I , valeur identifiée de γ , annule le gradient $\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma}$.

On a :

$$\mathcal{E}(\gamma) = \gamma_h^T \gamma_h - 2 \gamma^T \Omega_{h-1}^T \gamma_h + \gamma^T \Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \gamma$$

d'où :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma} = 2 \Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \gamma - 2 \Omega_{h-1}^T \gamma_h$$

avec :

$$\left[\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma} \right]^T = \left[\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma^1}, \frac{d\mathcal{E}}{d\gamma^2}, \dots, \frac{d\mathcal{E}}{d\gamma^{2n}} \right]$$

Le vecteur γ_I doit donc vérifier la relation :

(II,2)

$$\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \gamma_I = \Omega_{h-1}^T \gamma_h$$

Vérifions que γ_I , obtenu par résolution de cette équation, minimise bien la forme quadratique $\mathcal{E}(\gamma)$.

Formons pour cela la différence $\mathcal{E}(\gamma) - \mathcal{E}(\gamma_I)$:

$$\mathcal{E}(\gamma) - \mathcal{E}(\gamma_I) = \gamma^T \Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \gamma - 2 \gamma^T \Omega_{h-1}^T \gamma_h + 2 \gamma_I^T \Omega_{h-1}^T \gamma_h - \gamma_I^T \Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \gamma_I$$

En tenant compte de la relation (II,2), on obtient :

$$\mathcal{E}(\gamma) - \mathcal{E}(\gamma_I) = \gamma^T \Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \gamma - 2 \gamma^T \Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \gamma_I + \gamma_I^T \Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} \gamma_I$$

Soit :

$$\mathcal{E}(\gamma) - \mathcal{E}(\gamma_I) = (\gamma - \gamma_I)^T \Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} (\gamma - \gamma_I) = \|\Omega_{h-1} (\gamma - \gamma_I)\|^2 \geq 0$$

γ_I correspond donc au minimum de $\mathcal{E}(\gamma)$.

Lorsque la matrice carrée $\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1}$ est inversible, la solution en γ_I de l'équation (II,2) est :

(II,3)

$$\gamma_I = [\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1}]^{-1} \Omega_{h-1}^T \gamma_h$$

II,3 - Méthode du second ordre

Pour minimiser le critère d'identification $\mathcal{E}$, on peut aussi utiliser les méthodes itératives existant de recherche du minimum d'une fonction de plusieurs variables. Vérifions que l'une de ces méthodes, appelée par certains auteurs méthode de Newton [5], et qui permet d'arriver au minimum de la fonction en une itération pour un critère quadratique, conduit à la solution en γ égale à la valeur de γ_I correspondant au minimum et donnée par la relation (II,2) ou (II,3), bien que l'expression obtenue semble, au premier abord, différente.

La méthode dite de Newton consiste à appliquer l'algorithme suivant à partir d'un γ_0 initial arbitraire :

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i - h \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \gamma^2} \right]^{-1} \text{grad}_{\gamma_i} \mathcal{E}$$

où :

$$\text{grad}_{\gamma_i} \mathcal{E} = \left[\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma} \right]_{\gamma_i} = \text{vecteur gradient du critère calculé au point } \gamma_i ;$$

$$\left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \gamma^2} \right] = \text{matrice des dérivées secondes ;}$$

k est la constante de l'itération.

Avec un critère quadratique, cet algorithme conduit au minimum en une itération pour $k=1$ [5].

Explicitons l'expression de γ_{i+1} . On a :

$$\text{grad}_{\gamma_i} \mathcal{E} = - \sum_{j=k-2}^{k-1} (z_{j+1} - w_j^T \gamma_i) w_j$$

et, puisque :

$$(w_j^T \gamma_i) w_j = w_j (w_j^T \gamma_i) = (w_j w_j^T) \gamma_i$$

$$\left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \gamma^2} \right] = \sum_{j=k-2}^{k-1} (w_j w_j^T)$$

L'algorithme de Newton conduit au calcul suivant :

(II,4)

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i + \left[\sum_{j=k-2}^{k-1} w_j w_j^T \right]^{-1} \left[\sum_{j=k-2}^{k-1} (z_{j+1} - w_j^T \gamma_i) w_j \right]$$

Montrons que, quel que soit γ_i , γ_{i+1} est égale à la valeur de γ_I obtenue par la minimisation directe du critère $\mathcal{E}$.

La relation (II,4) s'écrit encore :

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i + \left[\sum_{j=k-2}^{k-1} w_j w_j^T \right]^{-1} \left(\sum_{j=k-2}^{k-1} z_{j+1} w_j \right) - \left[\sum_{j=k-2}^{k-1} w_j w_j^T \right]^{-1} \sum_{j=k-2}^{k-1} (w_j^T \gamma_i) w_j$$

or, on a déjà vu que :

$$\sum_{j=k-2}^{k-1} (w_j^T \gamma_i) w_j = \left[\sum_{j=k-2}^{k-1} (w_j w_j^T) \right] \gamma_i$$

D'où :

(II,5)

$$\gamma_{i+1} = \left[\sum_{j=k-2}^{k-1} w_j w_j^T \right]^{-1} \left(\sum_{j=k-2}^{k-1} z_{j+1} w_j \right)$$

Vérifions que cette dernière expression est identique à la relation (II,3) donnant γ_I .

Exprimons le second membre de (II,3) en fonctions de z_j et w_j .

On a :

$$\Omega_{h-1}^T \zeta_h = [w_{h-2}, w_{h-2+1}, \dots, w_{h-1}] \begin{bmatrix} z_{h-2+1} \\ \dots \\ z_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum w_j^1 z_{j+1} \\ \dots \\ \sum w_j^{2n} z_{j+1} \end{bmatrix}$$

Soit, en mettant z_{j+1} en facteur dans le dernier membre :

$$\Omega_{h-1}^T \zeta_h = \sum_{j=k-2}^{k-1} z_{j+1} w_j$$

En opérant de même pour $\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1}$, on obtient :

$$\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} = \begin{bmatrix} \omega_{h-2}, \dots, \omega_{h-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{h-2}^T \\ \dots \\ \omega_{h-1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=h-2}^{h-1} \omega_j^1 \omega_j, \dots, \sum_{j=h-2}^{h-1} \omega_j^{2h} \omega_j \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\Omega_{h-1}^T \Omega_{h-1} = \sum_{j=h-2}^{h-1} (\omega_j \omega_j^T)$$

La relation (II,3) s'écrit donc, en fonction de z_j et ω_j :

$$y_I = \left[\sum_{j=h-2}^{h-1} \omega_j \omega_j^T \right]^{-1} \left(\sum_{j=h-2}^{h-1} z_{j+1} \omega_j \right)$$

Cette expression est bien égale à l'expression de y_{i+1} donnée par la relation (II,5).

II,4 - Interprétations géométriques du critère

II,4.1 - Première interprétation

Le critère $\mathcal{E}$ donné par la relation (II,1) s'écrit encore :

$$\mathcal{E} = \sum_{j=h-2}^{h-1} \|\omega_j\|^2 \left(\frac{z_{j+1}}{\|\omega_j\|} - \frac{\omega_j^T y}{\|\omega_j\|} \right)^2 \quad \text{avec } \|\omega_j\|^2 = \omega_j^T \omega_j$$

Dans un espace $\mathcal{R}^{2n}$ orthonormé, considérons les hyperplans $\mathcal{P}_j$ d'équations :

$$z_{j+1} - \omega_j^T y = 0, \quad j = h-2, h-2+1, \dots, h-1.$$

La quantité $\left(\frac{z_{j+1}}{\|\omega_j\|} - \frac{\omega_j^T y}{\|\omega_j\|} \right)^2$ représente le carré de la distance euclidienne du point y à l'hyperplan $\mathcal{P}_j$.

La recherche du minimum de $\mathcal{E}$ est donc la minimisation de la somme des carrés des distances du point y aux hyperplans $\mathcal{P}_{h-2}, \mathcal{P}_{h-2+1}, \dots, \mathcal{P}_{h-1}$ affectés respectivement d'un coefficient pondérateur égal au carré de la norme du vecteur directeur ω_j de chacun de ces hyperplans.

II,4.2 - Autres interprétations

Dans un espace $\mathcal{R}^{2n}$ faisons intervenir le point représentatif y_s des paramètres exacts du système que nous appelons point objet, cette terminologie étant souvent utilisée pour l'identification paramétrique [16].

On a : $z_h = \Omega_{h-1} y_s$

Le critère $\mathcal{E}$ peut s'écrire :

$$\mathcal{E} = \|\Omega_{h-1} (y_s - y)\|^2 = \sum_{j=h-2}^{h-1} [\omega_j^T (y_s - y)]^2$$

ou encore :

(II,6)

$$\mathcal{E} = \sum_{j=h-2}^{h-1} \|\omega_j\|^2 \|y_s - y\|^2 \cos^2 \varphi_j = \left(\sum_{j=h-2}^{h-1} \|\omega_j\|^2 \cos^2 \varphi_j \right) \|y_s - y\|^2$$

où φ_j est "l'angle" formé par les vecteurs $y_s - y$ et ω_j défini par la relation :

$$\omega_j^T (y_s - y) = \|\omega_j\| \cdot \|y_s - y\| \cdot \cos \varphi_j$$

La relation (II,6) conduit aux interprétations suivantes :

- 1°) - la minimisation de $\mathcal{E}$ consiste à minimiser la distance d'un point γ de l'espace $\mathbb{R}^n$ au point objet γ_s pondérée par un coefficient $(\sum_{j=1}^{h-1} \|\omega_j\|^2 \omega^2 \varphi_j)^{1/2}$, cette distance $\|\gamma_s - \gamma\|$ est encore appelée par certains auteurs distance de structure [19] ;
- 2°) - si les vecteurs ω_j sont rendus unitaires, on peut encore dire que la recherche du minimum pour $\mathcal{E}$ conduit à minimiser la somme des carrés des projections du vecteur $\gamma_s - \gamma$ sur les vecteurs $\omega_{h-2}, \omega_{h-2+1}, \dots, \omega_{h-1}$.

ANNEXE III

COMMANDE OPTIMALE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE A TEMPS DISCRET AVEC UN INDICE DE CÔÛT QUADRATIQUE

III,1 - Rappel du problème

Il s'agit de déterminer une loi de commande d'un système linéaire à temps discret régi par l'équation :

(III,1)

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k$$

qui minimise un indice de coût quadratique :

(III,2)

$$\frac{J}{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q_k x_k + \lambda_k u_k^2) + \frac{1}{2} x_N^T Q_N x_N$$

où $Q_0, Q_1, \dots, Q_N$ sont des matrices symétriques définies positives et $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$ des scalaires positifs, le système évoluant de l'instant 0 à l'instant final NT avec un écart initial $x_0 \neq 0$.

La démonstration d'une condition suffisante d'optimalité relative au système linéaire avec un coût quadratique est donnée ci-après.

III,2 - Condition suffisante d'optimalité

Rappelons l'énoncé du théorème utilisé au chapitre III :

Théorème (1) : soient $u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*$ une loi de commande, $x_0, x_1^*, \dots, x_N^*$ l'état correspondant, $\psi_0^*, \psi_1^*, \dots, \psi_{N-1}^*$ le vecteur "adjoint" défini par la relation de récurrence :

(III,3)

$$\psi_i^* = F_i \psi_{i+1}^* - Q_i x_i^* \quad i = N-1, N-2, \dots, 0$$

avec la condition finale $\psi_N^* = -Q_N x_N^*$

Pour que $u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*$ soit optimale il suffit que :

$$\forall k=0, 1, \dots, N-1, \quad \forall u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$$

l'on ait l'inégalité :

$$\frac{1}{2} \lambda_k u_k^{*2} - \psi_{k+1}^{*T} G_k u_k^* \leq \frac{1}{2} \lambda_k u_k^2 - \psi_{k+1}^{*T} G_k u_k$$

Démonstration :

1°) - Q_k étant symétrique définie positive, on a :

$$(x_k^* - x_k)^T Q_k (x_k^* - x_k) \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$x_k^{*T} Q_k x_k^* - 2 x_k^T Q_k x_k^* + x_k^T Q_k x_k \geq 0$$

Cette inégalité peut encore s'écrire :

$$\frac{1}{2} (x_k^{*T} Q_k x_k^* - x_k^T Q_k x_k) \leq x_k^{*T} Q_k x_k^* - x_k^{*T} Q_k x_k$$

$$\frac{1}{2} (x_k^{*T} Q_k x_k^* - x_k^T Q_k x_k) \leq x_k^{*T} Q_k (x_k^* - x_k)$$

on a de même :

$$\frac{1}{2} (x_N^{*T} Q_N x_N^* - x_N^T Q_N x_N) \leq x_N^{*T} Q_N (x_N^* - x_N)$$

2°) - On vérifie aisément la relation suivante :

$$x_{k+1} = F_k F_{k-1} \dots F_0 x_0 + \sum_{j=1}^k F_k F_{k-1} \dots F_j G_{j-1} u_{j-1} + G_k u_k$$

En posant : $\Phi_{k,j} = F_{k-1} F_{k-2} \dots F_j$

$\Phi_{k,k} = I =$ matrice unité

la relation en x_{k+1} devient :

$$x_{k+1} = \Phi_{k+1,0} x_0 + \sum_{j=1}^{k+1} \Phi_{k+1,j} G_{j-1} u_{j-1}$$

d'où, pour $k \geq 1$:

$$x_k^* - x_k = \sum_{j=1}^k \Phi_{k,j} G_{j-1} (u_{j-1}^* - u_{j-1})$$

(pour $k=0$ on a $x_0^* = x_0$).

3°) - On a d'autre part la relation suivante :

$$\Psi_i^* = F_i^T F_{i+1}^T \dots F_{N-1}^T \Psi_N^* - \sum_{k=i}^{N-2} F_i^T F_{i+1}^T \dots F_k^T Q_{k+1} x_{k+1}^* - Q_i x_i^*$$

En remarquant que : $F_i^T F_{i+1}^T \dots F_k^T = \Phi_{k+1,i}^T$

on obtient :

$$\Psi_i^* = \Phi_{N,i}^T \Psi_N^* - \sum_{k=i-1}^{N-2} \Phi_{k+1,i}^T Q_{k+1} x_{k+1}^*$$

qui s'écrit encore :

$$\Psi_i^* = \Phi_{N,i}^T \Psi_N^* - \sum_{k=i}^{N-1} \Phi_{k,i}^T Q_k x_k^*$$

4°) - Considérons alors la différence :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^{*T} Q_k x_k^* - x_k^T Q_k x_k) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (x_k^{*T} Q_k x_k^* - x_k^T Q_k x_k) \quad (\text{car } x_0^* = x_0) \\ &\leq \sum_{k=1}^{N-1} x_k^{*T} Q_k (x_k^* - x_k) \quad (\text{d'après } 1^\circ) \end{aligned}$$

Soit encore, d'après les résultats obtenus en 2°) :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^{*T} Q_k x_k^* - x_k^T Q_k x_k) \leq \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^k x_k^{*T} Q_k \Phi_{k,i} G_{i-1} (u_{i-1}^* - u_{i-1})$$

en échangeant l'ordre des sommes : $\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^k = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i}^{N-1}$

On obtient la majoration :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^{*T} Q_k x_k^* - x_k^T Q_k x_k) \leq \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i}^{N-1} x_k^{*T} Q_k \Phi_{k,i} G_{i-1} (\mu_{i-1}^* - \mu_{i-1})$$

comme (d'après 3°) :

$$\sum_{k=i}^{N-1} x_k^T Q_k \Phi_{k,i} = \Psi_N^{*T} \Phi_{N,i} - \Psi_i^{*T}$$

on a donc :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^{*T} Q_k x_k^* - x_k^T Q_k x_k) \leq \Psi_N^{*T} \sum_{i=1}^{N-1} \Phi_{N,i} G_{i-1} (\mu_{i-1}^* - \mu_{i-1}) - \sum_{i=1}^{N-1} \Psi_i^{*T} G_{i-1} (\mu_{i-1}^* - \mu_{i-1})$$

Or, (d'après 2°) :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \Phi_{N,i} G_{i-1} (\mu_{i-1}^* - \mu_{i-1}) = x_N^* - x_N - G_{N-1} (\mu_{N-1}^* - \mu_{N-1})$$

d'où :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^{*T} Q_k x_k^* - x_k^T Q_k x_k) \leq \Psi_N^{*T} (x_N^* - x_N) - \sum_{i=1}^N \Psi_i^{*T} G_{i-1} (\mu_{i-1}^* - \mu_{i-1})$$

5°) - Par suite, on obtient :

$$J^* - J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^{*T} Q_k x_k^* - x_k^T Q_k x_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (r_k \mu_k^{*2} - r_k \mu_k^2) + \frac{1}{2} (x_N^{*T} Q_N x_N^* - x_N^T Q_N x_N)$$

$$J^* - J \leq \Psi_N^{*T} (x_N^* - x_N) - \sum_{i=1}^N \Psi_i^{*T} G_{i-1} (\mu_{i-1}^* - \mu_{i-1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (r_k \mu_k^{*2} - r_k \mu_k^2) + \frac{1}{2} (x_N^{*T} Q_N x_N^* - x_N^T Q_N x_N)$$

Comme d'autre part on a :

$$\Psi_N^{*T} = -x_N^{*T} Q_N$$

$$\frac{1}{2} (x_N^{*T} Q_N x_N^* - x_N^T Q_N x_N) \leq x_N^{*T} Q_N (x_N^* - x_N)$$

On obtient la majoration :

$$J^* - J \leq - \sum_{i=1}^N [\Psi_i^{*T} G_{i-1} (\mu_{i-1}^* - \mu_{i-1}) - (r_{i-1} \mu_{i-1}^{*2} - r_{i-1} \mu_{i-1}^2)]$$

Comme la quantité sous le signe $\sum$ est positive par hypothèse, on a bien : $J^* - J \leq 0$
c.q.f.d.

III,3 - Commande optimale

Rappelons l'expression de la commande optimale, obtenue au chapitre III (§ III,2) :

$$(III,4) \quad \mu_k^* = \lambda_k^{-1} G_k^T \Psi_{k+1}^*$$

Cherchons à exprimer μ_k^* sous la forme d'une relation linéaire en x_k^* .

En posant :

$$(III,5) \quad \Psi_k^* = -P_k^* x_k^*$$

où P_k^* est une matrice carrée à déterminer, on obtient :

$$\mu_k^* = -\lambda_k^{-1} G_k^T P_{k+1}^* x_{k+1}^* = -\lambda_k^{-1} G_k^T P_{k+1}^* [F_k x_k^* + G_k \mu_k^*]$$

d'où l'on tire :

(III,6)

$$u_k^* = - [G_k^T P_{k+1}^* G_k + \lambda_k]^{-1} G_k^T P_{k+1}^* F_k x_k^*$$

Pour déterminer P_{k+1}^* , écrivons la relation (III,3) en tenant compte de (III,5) :

$$- P_k^* x_k^* = - F_k^T P_{k+1}^* (F_k x_k^* + G_k u_k^*) - Q_k x_k^*$$

D'où en tenant compte de (III,6) dans cette relation et en écrivant qu'elle doit être vérifiée quel que soit x_k^* :

$$P_k^* = F_k^T P_{k+1}^* F_k - F_k^T P_{k+1}^* G_k [G_k^T P_{k+1}^* G_k + \lambda_k]^{-1} G_k^T P_{k+1}^* F_k + Q_k$$

la matrice P_{k+1}^* est obtenue par une relation récurrente rétrograde dite de "Riccati" (par analogie avec le cas continu). La condition finale sur P_N s'obtient par les relations :

$$\Psi_N^* = -P_N^* x_N^* = -Q_N x_N^* \quad \text{d'où} \quad P_N^* = Q_N$$

ANNEXE IV

COMMANDE OPTIMALE D'UN SYSTÈME STATIONNAIRE AVEC UN INDICE DE CÔUT QUADRATIQUE ET UN HORIZON INFINI

IV,1 - Définition du problème

Soit le système linéaire stationnaire discret d'équation :

(IV,1)

$$x_{k+1} = F x_k + G u_k$$

évoluant à partir de x_0 donné non nul, et un indice de coût quadratique à minimiser :

(IV,2)

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q x_k + \lambda u_k^2) + \frac{1}{2} x_N^T Q x_N$$

où Q est une matrice définie positive et λ un scalaire positif.

D'après les résultats du chapitre III (§ III,2) la commande optimale de ce système avec un horizon N fini s'écrit :

(IV,3)

$$u_k^* = - [G^T P_{k+1}^* G + \lambda]^{-1} G^T P_{k+1}^* F x_k^*$$

où P_{k+1}^* est donné par une équation récurrente dite de "Riccati" :

(IV,4)

$$P_k^* = F^T P_{k+1}^* F - F^T P_{k+1}^* G [G^T P_{k+1}^* G + \lambda]^{-1} G^T P_{k+1}^* F + Q$$

avec : $P_N^* = Q$

On peut définir la commande optimale en horizon infini comme la limite pour $N \rightarrow \infty$ de la commande optimale en horizon fini. On est donc ramené à l'étude de la matrice P_N^* , solution de l'équation de Riccati (IV,4) pour N tendant vers l'infini.

On montrera que, sous certaines conditions, la suite $P_{N-1}^*, P_{N-2}^*, \dots, P_k^*$ définie par la relation (IV,4) converge vers une matrice P définie positive, quelle que soit la valeur de P_N^* donnée définie positive. Cette matrice P , si elle existe, vérifiera l'équation :

(IV,5)

$$P = F^T P F - F^T P G [G^T P G + \lambda]^{-1} G^T P F + Q$$

Rappelons auparavant quelques propriétés relatives aux matrices carrées qui seront utilisées pour cette démonstration.

IV,2 - Rappels des propriétés relatives aux matrices carrées

IV,2.1 - Normes de matrices

Soit la norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\| = \sqrt{x^T x}$$

On peut définir la norme euclidienne d'une matrice carrée $A(n \times n)$ [10] :

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2$$

Cette définition est équivalente à la suivante :

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

où $\lambda_{\max}(A^T A)$ est la plus grande valeur propre de $A^T A$.

On a les propriétés suivantes :

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

$$\|A^T\| = \|A\|$$

IV,2.2 - Matrices asymptotiquement stables

On dira qu'une matrice H est asymptotiquement stable si le système linéaire discret associé $x_{k+1} = H x_k$ est asymptotiquement stable. On en déduit les propriétés suivantes :

1°) - si H est asymptotiquement stable, on a :

$$\|H\|^2 = \lambda_{\max}(H^T H) < 1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|H^k\| = 0$$

2°) - si $H_0, H_1, \dots, H_k$ sont asymptotiquement stables, on a :

$$\|H_0 H_1 \dots H_k\| \leq \|H_0\| \cdot \|H_1\| \cdot \dots \cdot \|H_k\| < 1$$

IV,2.3 - Matrices symétriques définies positives

Au cours du chapitre III (§ III,1 et § III,2) nous avons déjà mentionné les définitions des matrices définies positives et semi-définies positives. Rappelons les brièvement :

- matrice définie positive :

$$M > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^T M x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x \neq 0)$$

- matrice semi-définie positive :

$$M \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^T M x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x \neq 0)$$

On notera $M > N$ si $M - N > 0$

De même on écrira $M \geq N$ si $M - N \geq 0$

On peut montrer que le sens de l'inégalité se conserve pour les normes :

$$M > N \quad \Rightarrow \quad \|M\| > \|N\|$$

IV,2.4 - Théorèmes

Rappelons un théorème énoncé au chapitre III (§ III,2) [10].

Théorème 1 : Pour qu'un système linéaire $x_{k+1} = F x_k$ soit asymptotiquement stable il faut et il suffit qu'il existe deux matrices B et $C \geq 0$ telles que l'on ait l'égalité matricielle :

$$F^T B F - B = -C$$

On peut étendre ce résultat :

corollaire : S'il existe deux matrices symétriques B et C vérifiant la relation précédente et si F est asymptotiquement stable et $C \geq 0$, on a alors $B \geq 0$.

Donnons d'autre part une propriété relative à la convergence d'une suite de matrices carrées.

On dira qu'une suite de matrices $A_1, \dots, A_n$ tend vers une matrice A si l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

[21] : Rappelons l'énoncé d'un théorème relatif à la convergence monotone d'une suite de matrices

Théorème 2 : Soient une suite de matrices symétriques semi-définies positives $P_1, P_2, \dots, P_k$ et une matrice Q symétrique ≥ 0 telles que :

$$P_1 \geq P_2 \geq \dots \geq P_k \geq \dots \geq Q \geq 0$$

La suite P_k est alors convergente et l'on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_\infty \geq Q$$

IV,3 - Existence de la solution de l'équation matricielle (IV,5)

IV,3.1 - Énoncé du théorème d'existence

Si l'on pose :

$$\begin{aligned} U &= [G^T P G + \lambda]^{-1} G^T P F \\ H &= F - G U \end{aligned}$$

l'équation matricielle (IV,5) s'écrit :

(IV,6)

$$P = H^T P H + \lambda U^T U + Q$$

On démontrera la propriété suivante :

- si le couple (F, G) est stabilisable, c'est-à-dire s'il existe une matrice V telle que la matrice $F - G V$ soit asymptotiquement stable, l'équation (IV,6) admet une solution P symétrique définie positive.

IV,3.2 - Démonstration

Une démonstration est donnée en considérant une suite matricielle, analogue à celle utilisée par Kleinman [13] pour résoudre l'équation (IV,6) dans le cas du système à temps continu.

Cette suite est définie par les relations suivantes :

(IV,7)

$$U_k = [G^T P_k G + \lambda]^{-1} G^T P_k F$$

(IV,8)

$$H_k = F - G U_k$$

(IV,9)

$$P_{k+1} - H_k^T P_{k+1} H_k = \lambda U_k^T U_k + Q$$

La construction des matrices $P_1, P_2, \dots, P_k$ s'effectue à partir d'une valeur U_0 donnée, de la façon suivante : on calcule H_0 par (IV,8), P_1 est alors obtenu par la relation linéaire (IV,9). On calcule ensuite U_1 par la relation (IV,7), et ainsi de suite.

L'existence de la solution de l'équation (IV,6) sera démontrée lorsque l'on aura montré la convergence de la suite $P_1, P_2, \dots, P_k$ définie par les relations (IV,7) à (IV,9). Montrons que celle-ci converge lorsque U_0 est choisi tel que la matrice $H_0 = F - G U_0$ soit asymptotiquement stable. On utilisera, pour cela, le théorème 2 énoncé au § IV,2.

Etablissons les propriétés suivantes :

1°) - les matrices $P_1, P_2, \dots, P_k$ sont toutes définies positives

Donnons d'abord une expression de $P_k - H_k^T P_k H_k$. En tenant compte de :

$$H_k = F - G U_k = H_{k-1} + G(U_{k-1} - U_k)$$

et de la relation (IV,9), on a :

$$P_k - H_k^T P_k H_k = P_k - H_{k-1}^T P_k H_{k-1} - H_{k-1}^T P_k G(U_{k-1} - U_k) - (U_{k-1} - U_k)^T G^T P_k H_{k-1} - (U_{k-1} - U_k)^T G^T P_k G(U_{k-1} - U_k)$$

$$P_k - H_k^T P_k H_k = Q + \lambda U_{k-1}^T U_{k-1} - H_{k-1}^T P_k G(U_{k-1} - U_k) - (U_{k-1} - U_k)^T G^T P_k H_{k-1} - (U_{k-1} - U_k)^T G^T P_k G(U_{k-1} - U_k)$$

Or, la relation (IV,7) peut s'écrire :

$$\lambda U_k = G^T P_k (F - G U_k) = G^T P_k H_k = G^T P_k H_{k-1} + G^T P_k G(U_{k-1} - U_k)$$

d'où :

$$G^T P_k H_{k-1} = \lambda U_k - G^T P_k G(U_{k-1} - U_k)$$

En reportant cette expression dans le second membre de $P_k - H_k^T P_k H_k$, on obtient :

(IV,10)

$$P_k - H_k^T P_k H_k = Q + \lambda U_k^T U_k + (U_{k-1} - U_k)^T (G^T P_k G + \lambda) (U_{k-1} - U_k)$$

La propriété 1°) se démontre de proche en proche :

- supposons H_{k-1} asymptotiquement stable, Q étant > 0 , on déduit du théorème 1 et de la relation (IV,9) : $P_k > 0$. En appliquant ensuite le même théorème (c.s.) à H_k vérifiant la relation (IV,9) on déduit : H_k asymptotiquement stable ;
- H_0 étant donné asymptotiquement stable par hypothèse, la propriété 1°) est donc démontrée.

2°) - $P_1 \geq P_2 \geq \dots \geq P_k \geq \dots \geq Q > 0$

Etablissons une relation linéaire en $P_k - P_{k+1}$, en formant la différence de deux équations consécutives du type (IV,9) :

$$P_k - P_{k+1} - H_{k+1}^T P_k H_{k+1} + H_k^T P_{k+1} H_k = \lambda U_{k+1}^T U_{k+1} - \lambda U_k^T U_k$$

en tenant compte des relations :

$$H_{k+1} = H_k + G(U_k - U_{k+1})$$

et :

$$G^T P_k H_k = \lambda U_k$$

on obtient :

$$P_k - P_{k+1} - H_k^T (P_k - P_{k+1}) H_k = (U_k - U_{k+1})^T G^T P_k H_k + H_k^T P_k G(U_k - U_{k+1}) + (U_k - U_{k+1})^T G^T P_k G(U_k - U_{k+1}) + \lambda U_{k+1}^T U_{k+1} - \lambda U_k^T U_k$$

$$P_k - P_{k+1} - H_k^T (P_k - P_{k+1}) H_k = \lambda (U_k - U_{k+1})^T U_k + \lambda U_k^T (U_k - U_{k+1}) + (U_k - U_{k+1})^T G^T P_k G(U_k - U_{k+1}) + \lambda U_{k+1}^T U_{k+1} - \lambda U_k^T U_k$$

Soit en regroupant les termes du second membre :

(IV,11)

$$P_k - P_{k+1} - H_k^T (P_k - P_{k+1}) H_k = (U_k - U_{k-1})^T (G^T P_k G + \lambda) (U_k - U_{k-1})$$

A partir de cette relation on déduit du corollaire énoncé au § IV,2 :

$\forall k, H_k$ étant asymptotiquement stable (d'après un résultat obtenu en 1°)), et la matrice au second membre de (IV,11) étant ≥ 0 , on a donc :

$$P_k - P_{k+1} \geq 0 \quad \forall k$$

c'est-à-dire :

$$P_1 \geq P_2 \geq \dots \geq P_k \geq P_{k+1} \geq \dots > 0$$

D'autre part, la relation (IV,9) montre qu'on a bien, puisque P_k est > 0 , l'inégalité :

$$P_k \geq Q > 0$$

la propriété 2°) est donc démontrée.

D'après le théorème 2, la suite P_k définie par les relations (IV,7) à (IV,9) et vérifiant les propriétés 1°) et 2°), converge et sa limite satisfait la condition :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_\infty \geq Q > 0$$

L'existence d'une solution définie positive de l'équation (IV,6) est donc démontrée.

Remarque : On déduit de la solution $P > 0$ une propriété intéressante de la matrice H , définie par la relation (IV,6), que l'on peut écrire :

$$H^T P H - P = -Q - \lambda U^T U$$

D'après le théorème 1, Q et P étant > 0 , la matrice H est donc asymptotiquement stable.

IV,4 - Convergence de la relation récurrente de Riccati

Considérons la relation récurrente intervenant dans la commande optimale (IV,4) :

(IV,12)

$$P_k = F^T P_{k-1} F - F^T P_{k-1} G [G^T P_{k-1} G + \lambda]^{-1} G^T P_{k-1} F + Q$$

où l'indice k est compté à partir de l'horizon N .

On montrera que, quelle que soit la valeur initiale $P_0 > 0$, la suite matricielle P_k définie par cette relation converge vers la solution de l'équation (IV,6), si cette solution existe.

Avec les notations :

$$\begin{aligned} U_{k-1} &= [G^T P_{k-1} G + \lambda]^{-1} G^T P_{k-1} F \\ H_{k-1} &= F - G U_{k-1} \end{aligned}$$

la relation (IV,12) devient :

(IV,13)

$$P_k = H_{k-1}^T P_{k-1} H_{k-1} + \lambda U_{k-1}^T U_{k-1} + Q$$

Posons d'autre part :

$$\delta P_k = P_k - P, \quad \delta U_k = U_k - U$$

où P et U sont donnés par l'équation (IV,6).

En combinant les différentes relations (IV,6), (IV,12) et (IV,13), on obtient les relations suivantes en $\delta P_k, \delta U_k$:

$$(IV,14) \quad \delta P_k = H^T \delta P_{k-1} H - \delta U_{k-1}^T (G^T P_{k-1} G + \lambda) \delta U_{k-1}$$

$$(IV,15) \quad \delta P_k = H_{k-1}^T \delta P_{k-1} H_{k-1} + \delta U_{k-1}^T (G^T P G + \lambda) \delta U_{k-1}$$

$$(IV,16) \quad \delta P_k = H^T \delta P_{k-1} H_{k-1}$$

De cette dernière relation on déduit :

$$(IV,17) \quad \boxed{\delta P_k = (H^T)^k \delta P_0 H_0 H_1 \dots H_{k-1}}$$

Démontrons la convergence de la suite P_k dans les cas suivants :

$$1^\circ) - \underline{P_0 \geq P > 0}$$

δP_0 étant ≥ 0 , on déduit de la relation (IV,15) :

$$\delta P_k \geq 0 \quad \forall k=1, 2, \dots$$

On peut alors déduire la stabilité de la matrice H_k . Ecrivons la relation (IV,13) sous la forme suivante :

$$P_{k-1} - H_{k-1}^T P_{k-1} H_{k-1} = P_{k-1} - P_k + \lambda U_{k-1}^T U_{k-1} + Q$$

en tenant compte de :

$$P_{k-1} - P_k = \delta P_{k-1} - \delta P_k$$

et de la relation (IV,14) on obtient finalement :

$$P_{k-1} - H_{k-1}^T P_{k-1} H_{k-1} = \delta P_{k-1} - H \delta P_{k-1} H + \delta U_{k-1}^T (G^T P_{k-1} G + \lambda) \delta U_{k-1} + \lambda U_{k-1}^T U_{k-1} + Q$$

Or H étant asymptotiquement stable et $\delta P_{k-1} \geq 0$ la quantité $\delta P_{k-1} - H \delta P_{k-1} H$ est ≥ 0 , le second membre de cette relation qui est composée d'une somme de matrices > 0 ou ≥ 0 est définie positive. D'après le théorème 1 (c.s.) la matrice H_{k-1} est donc asymptotiquement stable.

On en déduit alors, en considérant les normes euclidiennes des deux membres de la relation (IV,17) :

$$\|\delta P_k\| = \|(H^T)^k \delta P_0 H_0 H_1 \dots H_{k-1}\|$$

qui s'écrit encore :

$$\|\delta P_k\| \leq \|H^k\| \cdot \|\delta P_0\| \cdot \|H_0 H_1 \dots H_{k-1}\| \leq \|H^k\| \cdot \|\delta P_0\|$$

la dernière inégalité s'obtient par une propriété des matrices stables (cf. § IV,2).

Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} \|H^k\| = 0$ (H étant asymptotiquement stable). On a donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta P_k\| = 0$$

$$2^\circ) - \underline{0 < P_0 \leq P}$$

δP_0 étant ≤ 0 , on en déduit, par la relation (IV,14) :

$$\delta P_k \leq 0 \quad \forall k=1, 2, \dots \quad \text{c'est-à-dire} \quad P_0 \leq P_1 \leq \dots \leq P_k \leq \dots \leq P.$$

Par ailleurs, on déduit de la relation (IV,13) :

$$H_{k-1}^T P_{k-1} H_{k-1} \leq P_k \leq P$$

D'où :

$$H_{k-1}^T H_{k-2}^T \dots H_0^T P_0 H_0 H_1 \dots H_{k-1} \leq P$$

De cette inégalité on déduit donc :

$$\|H_0 H_1 \dots H_{k-1}\| < \mu \quad \forall k$$

μ étant un scalaire > 0 .

En considérant les normes des deux membres de la relation (IV,17), on a donc :

$$\|\delta P_k\| \leq \|H^k\| \cdot \|\delta P_0\| \cdot \|H_0 H_1 \dots H_{k-1}\| \leq \|H^k\| \cdot \|\delta P_0\| \cdot \mu$$

D'où :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta P_k\| = 0$$

La démonstration de la convergence de la relation récurrente (IV,12) est achevée.

IV,5 - Commande optimale en horizon infini

Dans le paragraphe précédent on a montré la convergence de la relation récurrente de "Riccati" vers la matrice $P > 0$ solution de l'équation (IV,5). La condition d'existence de celle-ci est établie au § IV,3. On peut donc formuler le résultat suivant :

Si le couple (F, G) est stabilisable, la commande optimale du système (IV,1) qui minimise l'indice de coût :

$$\frac{J}{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + 2u_k^T)$$

existe et son expression, à l'instant kT , est donnée par la relation :

$$u_k^* = - [G^T P G + \lambda]^{-1} G^T P F x_k^* = -U x_k^*$$

où P est une solution définie positive de l'équation :

$$P = F^T P F - F^T P G [G^T P G + \lambda]^{-1} G^T P F + Q$$

L'équation d'évolution du système optimal s'écrit :

$$x_{k+1}^* = (F - GU) x_k^* = H x_k^*$$

Il a été démontré (§ IV,3) que H est asymptotiquement stable, il en est donc de même du système optimal décrit par l'équation $x_{k+1}^* = H x_k^*$.

Le calcul de la commande optimale nécessite la résolution d'une équation matricielle non linéaire, les paragraphes précédents IV,2 et IV,3 ont déjà fourni deux algorithmes de résolution, comparons leur vitesse de convergence.

IV,6 - Résolution numérique de l'équation matricielle (IV,5)

IV,6.1 - Algorithme à convergence linéaire

La relation récurrente de Riccati (IV,12) fournit un des algorithmes :

$$P_k = F^T P_{k-1} F - F^T P_{k-1} G [G^T P_{k-1} G + \lambda]^{-1} G^T P_{k-1} F + Q$$

Cet algorithme converge vers la solution de l'équation (IV,5) quelle que soit la valeur initiale $P_0 > 0$.

La vitesse de convergence est donnée par la relation (IV,16) :

$$\delta P_k = H^T \delta P_{k-1} H_{k-1}$$

La convergence est linéaire car δP_k dépend linéairement de δP_{k-1} .

IV,6.2 - Algorithme à convergence quadratique

La suite matricielle utilisée pour démontrer l'existence de P peut être employée pour résoudre numériquement cette équation, son expression est donnée par les relations (IV,7) à (IV,9).

P_k est déterminé ici par une expression linéaire. On peut le calculer en explicitant tous ses éléments, on obtient ainsi un système linéaire homogène à résoudre. Cet algorithme converge lorsque U_0 est choisi, tel que la matrice $H_0 = F - G U_0$ soit asymptotiquement stable.

Déterminons la vitesse de convergence de cet algorithme. Retranchons pour cela, membre à membre, l'équation (IV,6) de (IV,9) :

$$P_k - P + H^T P H - H_{k-1}^T P_k H_{k-1} = \lambda U_{k-1}^T U_{k-1} - \lambda U^T U$$

En tenant compte des relations :

$$H = H_{k-1} + G (U_{k-1} - U)$$

$$\lambda U_{k-1} = G^T P_{k-1} H_{k-1}$$

$$\lambda U = G^T P H$$

on obtient :

$$\delta P_k - H_{k-1}^T \delta P_k H_{k-1} = \delta U_{k-1}^T (G^T P G + \lambda) \delta U_{k-1}$$

Or :

$$\lambda \delta U_{k-1} = G^T (P_{k-1} H_{k-1} - P H)$$

$$\lambda \delta U_{k-1} = G^T \delta P_{k-1} H - G^T P_{k-1} G \delta U_{k-1}$$

D'où :

$$\delta U_{k-1} = (G^T P_{k-1} G + \lambda)^{-1} G^T \delta P_{k-1} H$$

La relation en δP_k devient donc :

$$\delta P_k - H_{k-1}^T \delta P_k H_{k-1} = H^T \delta P_{k-1} G [G^T P_{k-1} G + \lambda]^{-1} [G^T P G + \lambda] [G^T P_{k-1} G + \lambda] G^T \delta P_{k-1} H$$

La convergence de cet algorithme défini par les relations (IV,7) à (IV,9) est quadratique, car chaque élément de δP_k est une fonction quadratique des éléments de δP_{k-1} .

ANNEXE V

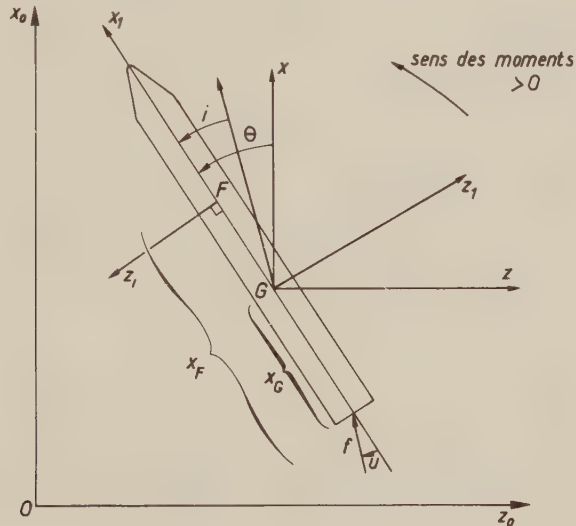
EXEMPLE D'UN SYSTÈME DU SECOND ORDRE

Considérons le cas de la stabilisation en tangage du premier étage d'une fusée-sonde à l'aide des gouvernes de jet. Il s'agit de maintenir la trajectoire dans une direction donnée, voisine de la verticale locale. Le mouvement de la fusée est supposé uniformément accéléré et les perturbations rencontrées au cours du vol sont uniquement du type des percussions angulaires.

V,1 - Mise en équation

Définissons d'abord les caractéristiques de la fusée :

- B = moment d'inertie en tangage par rapport au centre de gravité G
- S = surface de référence
- l = longueur de référence
- f = résultante des forces de stabilisation
- x_G = distance du centre de gravité au point d'application de la force f
- x_F = distance du foyer aérodynamique F au culot
- C_{mq} = coefficient d'amortissement aérodynamique
- C_{Z_i} = coefficient de portance aérodynamique



Les équations des petits mouvements de la fusée rigide autour du centre de gravité G , dans un repère d'axes $Gx_0y_0z_0$ (Gx_0 orienté dans la direction de vol désirée) s'écrivent :

$$(V,1) \quad \begin{cases} \dot{\theta} = q \\ B\dot{q} = Z_i (x_F - x_G) \theta + \frac{1}{2} C_{mq} \rho S l V^2 \frac{q l}{V} + f x_G u \end{cases}$$

où la direction de la vitesse V est supposée confondue avec l'axe Gx_0 ,

avec : θ = assiette angulaire de la fusée

q = vitesse angulaire

u = angle de braquage des tuyères de stabilisation

V = vitesse de la fusée

ρ = masse volumique de l'air ambiant

$Z_i = \frac{1}{2} C_{Z_i} \rho S V^2$ = portance aérodynamique

Posons :

$$-a = \frac{Z_i (x_F - x_G)}{B} ; -b = \frac{1}{8} \frac{C_{mq} \rho l^2 S V}{B} ; c = \frac{f x_G}{B}$$

le système (V,1) devient :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = -a\theta - bq + cu \end{cases}$$

Soit :

(V,2)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

avec $x = \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix}$ = vecteur d'état de la fusée

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}.$$

En écrivant le système sous la forme d'une équation différentielle linéaire, on obtient :

(V,3)

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + a\theta = cu$$

Les coefficients a , b , c varient au cours d'un vol donné à cause de divers facteurs tels que la variation de vitesse, le déplacement du centre de gravité dû à la vidange du propulseur, à la variation de la masse volumique de l'air, etc ...

V,2 - Equation d'état discrète d'un système du second ordre stationnaire

Traisons la discrétisation du système donné par la relation (V,2) où l'on suppose les coefficients a , b , c constants et où la commande u est choisie constante entre les instants d'échantillonnage de période T .

L'équation discrète est [4] :

(V,4)

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$

avec :

$$F = \begin{bmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g^1 \\ g^2 \end{bmatrix}$$

$$F = e^{AT}$$

$$G = A^{-1} [e^{AT} - I] B$$

Donnons une expression explicite des éléments de F , G en fonction des coefficients a , b , c des matrices A , B . Pour cela, appliquons la méthode de la transformée de Laplace.

La transformée de Laplace de l'équation (V,2) est :

$$x(p) = (pI - A)^{-1} x_0 + (pI - A)^{-1} \frac{B}{p} u_k$$

Les matrices F et G de l'équation discrète (V,4) sont obtenues en calculant les transformées inverses des quantités $(pI - A)^{-1}$ et $(pI - A)^{-1} B/p$

On a :

$$pI - A = \begin{bmatrix} p & -1 \\ a & p+b \end{bmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{p^2 + bp + a} \begin{bmatrix} p+b & 1 \\ -a & p \end{bmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} \frac{B}{p} = \frac{1}{(p^2 + bp + a)} \begin{bmatrix} \frac{c}{p} \\ c \end{bmatrix}$$

En tenant compte des correspondances suivantes entre les transformées de Laplace et les expressions temporelles :

$$\frac{1}{p^2 + bp + a} \longrightarrow \frac{2 e^{-bT/2}}{\sqrt{b^2 - 4a}} \times \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T$$

$$\frac{p + b/2}{p^2 + bp + a} \longrightarrow e^{-bT/2} \times \operatorname{ch} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T$$

et, puisque :

$$\frac{1}{p(p^2 + bp + a)} = \frac{1/a}{p} - \frac{1}{a} \cdot \frac{p+b}{p^2 + bp + a}$$

on obtient les expressions donnant les éléments des matrices F et G en fonction des coefficients a , b , c de l'équation continue :

$$\begin{aligned} f^{12} &= \frac{2 e^{-bT/2}}{\sqrt{b^2 - 4a}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T \\ f^{21} &= - \frac{2a e^{-bT/2}}{\sqrt{b^2 - 4a}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T \\ f^{22} &= e^{-bT/2} \left[\operatorname{ch} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T - \frac{b}{\sqrt{b^2 - 4a}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T \right] \\ f^{11} &= e^{-bT/2} \left[\operatorname{ch} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 4a}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T \right] \\ g^1 &= \frac{c}{a} \left[1 - e^{-bT/2} \left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 4a}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T \right) \right] \\ g^2 &= \frac{2c e^{-bT/2}}{\sqrt{b^2 - 4a}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T \end{aligned}$$

Remarque : Ces expressions sont données pour $b^2 - 4a > 0$; lorsque $b^2 - 4a \leq 0$, on remplace $\sqrt{b^2 - 4a}$ par $i\sqrt{4a - b^2}$ et les fonctions hyperboliques deviennent des fonctions trigonométriques.

V,3 - Autres expressions discrètes équivalentes

L'observation disponible du système (V,1) étant l'assiette angulaire θ , on a :

$$\boxed{y_k = \theta_k = C x_k} \quad \text{avec} \quad C = [1, 0]$$

Soit le changement de base défini par :

$$y_k = M x_k$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f^{11} & f^{12} \end{bmatrix}$$

L'équation discrète (V,4) devient alors (d'après le chapitre I, § I,2) :

(V,5)

$$\boxed{\begin{aligned} y_{k+1} &= D y_k + E u_k \\ y_k &= \theta_k = [1, 0] y_k \end{aligned}}$$

avec :

$$D = MFM^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ d^1 & d^2 \end{bmatrix}; \quad E = MG = \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \end{bmatrix}$$

Explicitons les éléments des matrices D , E en fonction de ceux de F , G .

On a :

$$MF = \begin{bmatrix} f^{11} & , & f^{12} \\ (f^{11})^2 + f^{12} f^{21} & , & f^{11} f^{12} + f^{12} f^{22} \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{f^{11}}{f^{12}} & \frac{1}{f^{12}} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$D = MF M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & , & 1 \\ f^{12} f^{21} - f^{11} f^{22} & , & f^{11} + f^{22} \end{bmatrix}, \quad E = MG = \begin{bmatrix} g^1 \\ f^{11} g^1 + f^{12} g^2 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{cases} d^1 = f^{12} f^{21} - f^{11} f^{22} \\ d^2 = f^{11} + f^{22} \\ e^1 = g^1 \\ e^2 = f^{11} g^1 + f^{12} g^2 \end{cases}$$

D'autre part, l'équation récurrente analogue à l'équation différentielle (V,3) s'écrit (d'après le chapitre I, § I,2) :

$$\theta_{k+2} = \gamma^1 \theta_k + \gamma^2 \theta_{k+1} + \gamma^3 u_k + \gamma^4 u_{k+1}$$

avec :

$$\begin{cases} \gamma^1 = d^1 \\ \gamma^2 = d^2 \\ \gamma^3 = e^2 - d^2 e^1 \\ \gamma^4 = e^1 \end{cases}$$

En exprimant les éléments $\gamma^1, \dots, \gamma^4$ en fonction de f^{ij} , puis en fonction de a , b , c , on obtient les relations suivantes :

$$(V,6) \quad \begin{aligned} \gamma^1 &= f^{12} f^{21} - f^{11} f^{22} = -e^{-bT} \\ \gamma^2 &= f^{11} + f^{22} = 2 e^{-bT/2} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T \\ \gamma^3 &= f^{12} g^1 - f^{22} g^1 = \frac{c}{a} e^{-bT/2} \left[e^{-bT/2} - \left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T - \frac{b}{\sqrt{b^2 - 4a}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T \right) \right] \\ \gamma^4 &= g^1 = \frac{c}{a} \left[1 - e^{-bT/2} \left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 4a}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T \right) \right] \end{aligned}$$

V,4 - Relations donnant a , b , c en fonction de $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$

En combinant les relations (V,6) on peut obtenir les expressions simples donnant a , b , c en fonction de $\gamma^1, \dots, \gamma^4$

Ecrivons (V,6) sous la forme suivante :

$$(V,7) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \gamma^1 = f^{12} f^{21} - f^{11} f^{22} = -e^{-bT} \\ b) \gamma^2 = f^{11} + f^{22} = 2 e^{-bT/2} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2} T \\ c) \gamma^3 = -\frac{c}{a} (f^{22} + \gamma^1) \\ d) \gamma^4 = g^1 = -\frac{c}{a} (f^{11} - 1) \end{array} \right.$$

La première donne immédiatement :

$$(V,8) \quad \boxed{b = -\frac{1}{T} \operatorname{Log} (-\gamma^1)}$$

En combinant les deux dernières relations (V,7c) et (V,7d), on obtient :

$$\gamma^3 + \gamma^4 = -\frac{c}{a} (f^{11} + f^{22} + \gamma^1 - 1)$$

D'où, en tenant compte de (V,7b) :

$$(V,9) \quad \boxed{\Delta = -\frac{a}{c} = \frac{\gamma^1 + \gamma^2 - 1}{\gamma^3 + \gamma^4}}$$

On en déduit ensuite les expressions de f^{11} et de f^{22} en fonction de Δ :

$$f^{11} = 1 + \gamma^4 \Delta, \quad f^{22} = -\gamma^1 + \gamma^3 \Delta$$

Comme, d'autre part, on a les relations suivantes (d'après les expressions de f^{ij}) :

$$f^{21} = -a f^{12} \quad \text{et} \quad -b f^{12} = f^{22} - f^{11}$$

On en déduit, en tenant compte de (V,7a) :

$$a = -\frac{f^{21}}{f^{12}} = -\frac{\gamma^1 + f^{11} f^{22}}{(f^{12})^2}$$

Soit :

$$(V,10) \quad \boxed{a = -\frac{b^2 [\gamma^1 + (1 + \gamma^4 \Delta)(-\gamma^1 + \gamma^3 \Delta)]}{[1 + \gamma^1 + (\gamma^4 - \gamma^3) \Delta]^2}}$$

On calcule c par la relation :

$$(V,11) \quad \boxed{c = -a/\Delta}$$

Les relations (V,8) à (V,11) sont utilisées pour déterminer les valeurs des coefficients a , b , c à partir des valeurs identifiées de $\gamma^1, \dots, \gamma^4$ (cf. chapitre II, § II,3.2).

ANNEXE VI

ESTIMATION DU TEMPS DE CALCUL POUR UN CALCULATEUR NUMÉRIQUE

On évalue ici approximativement, dans le cas du système du second ordre, le temps d'exécution des opérations élaborées par un calculateur numérique pour déterminer la commande à appliquer à chaque instant d'échantillonnage. La méthode utilisée consiste à calculer le nombre d'opérations élémentaires que doit effectuer un tel calculateur.

VI,1 - Temps de calcul des opérations vectorielles

Considérons d'abord les opérations :

- 1°) - addition de deux vecteurs (de dimension n)
- 2°) - multiplication de deux vecteurs (de dimension n)
- 3°) - multiplication d'une matrice $n \times m$ par une matrice $m \times n$
- 4°) - inversion d'une matrice carrée $n \times n$

Les temps de calcul des trois premières opérations sont :

$$T_1 = \alpha n A$$

$$T_2 = \alpha n (A+M)$$

$$T_3 = \alpha n^2 m (A+M)$$

où A et M sont respectivement les temps d'exécution d'une addition et d'une multiplication, α est le facteur correspondant à l'enregistrement et l'accès en mémoire (sa valeur est en général comprise entre 2 et 3).

Pour l'opération 4°), on prend : (d'après [18])

$$T_4 \simeq \alpha n^3 M$$

VI,2 - Temps de calcul de l'étape d'identification

VI,2.1 - Processus courant

Pour la méthode approchée, l'identification consiste à calculer :

$$p_k = [M^T M]^{-1} M^T v$$

où M = matrice $\lambda \times 3$

v = vecteur colonne $\lambda \times 1$

λ étant un entier donné, supérieur ou égal à 3.

Le calcul de p_k nécessite une durée de :

$$T_{I_1} = 2 T_3 + T_4 + 4 T_2$$

Pour $\lambda=5$, ce temps vaut :

$$T_{I_1} = \alpha (84A + 111M)$$

VI,2.2 - Initialisation

Pendant la phase d'initialisation, on doit effectuer le calcul suivant :

$$p_k = p_{k-1} - M'^T [M' M'^T]^{-1} (M' p_{k-1} - v')$$

avec M' = matrice $\lambda' \times 3$, avec $\lambda' \leq 3$

v' = vecteur $\lambda' \times 1$

Le temps de calcul vaut (pour $\lambda'=3$) :

$$T_{I_2} = 2 T_1 + 6 T_2 + 2 T_3 + T_4$$

soit :

$$T_{I_2} = \alpha (78A + 100M)$$

VI,3 - Temps de calcul pour l'élaboration de la commande

La commande est donnée par :

$$u_k = - (E^T P E + \lambda)^{-1} E^T P D y_k$$

où P vérifie l'équation :

$$P = D^T P D - D^T P E (E^T P E + \lambda)^{-1} E^T P D + S$$

Si l'on suppose que la résolution de l'équation matricielle en P est réalisée par l'algorithme à convergence quadratique (§ III, 3.3) en une itération, ce qui est le cas pour le système du second ordre considéré, le temps de calcul vaut :

$$T_U = \alpha (54A + 144M)$$

VI, 4 - Temps total de calcul

La durée totale du calcul est :

$$T_T = T_{I_1} + T_U = \alpha (139A + 255M)$$

Pour des calculateurs embarqués existants dans l'année 1968, on peut admettre que le temps de calcul d'une addition est de 4 à 9 μs et celui d'une multiplication de 20 à 40 μs ; on a alors : (en prenant $\alpha = 3$)

$$A = 4 \mu s, M = 20 \mu s \Rightarrow T_T = 17 ms$$

$$A = 9 \mu s, M = 40 \mu s \Rightarrow T_T = 35 ms$$

Manuscrit remis le 22 septembre 1970.



RÉFÉRENCES

- [1] - M. ATHANS and P. FALB - Optimal control, Mc Graw-Hill, (1966).
- [2] - D.O. BAECHLER - Trends in the design of aerospace digital computer, papier présenté au Colloque International sur les Calculateurs Embarqués. Centre National d'Etudes Spatiales, décembre 1968, (1968).
- [3] - J. BASS - Cours de mathématiques, tome II, Masson & Cie, (1961).
- [4] - R. BOUDAREL, J. DELMAS et P. GUICHET - Commande optimale des processus. Tome I : concepts fondamentaux de l'automatique, Dunod, (1967).
- [5] - R. BOUDAREL, J. DELMAS et P. GUICHET - Commande optimale des processus. Tome II : programmation non linéaire et ses applications, Dunod, (1968).
- [6] - R. BOUDAREL, J. DELMAS et P. GUICHET - Commande optimale des processus. Tome III : programmation dynamique et ses applications, Dunod, (1969).
- [7] - G. CAGNAC, E. RAMIS et J. COMMEAU - Nouveaux cours de mathématiques spéciales, tome 1 ; algèbre, Masson et Cie, (1961).
- [8] - A.J. DYMOCK, K.A. HELPS and J.F. MEREDITH - The place of adaptive control in the future development of automatic flight control systems. AGARD Symposium on Advanced Control Flight Systems, (1968).
- [9] - Y.C. HO and R.C. K. LEE - Identification of linear dynamical systems, Journal of Information and Control, n° 8, p. 93-110, (1965).
- [10] - R.E. KALMAN and J.E. BERTRAM - Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov. I - Continuous-time systems,
II - Discrete-time systems, transactions of the A.S.M.E., Journal of Basic Engineering, p. 371-400, (1960).
- [11] - R.E. KALMAN - Mathematical design of linear dynamical systems, SIAM Journal of Control, n° 1, p. 152-192, (1963).
- [12] - R.E. KALMAN, Y.C. HO and K.S. NARENDRA - Controllability of linear dynamical systems, contributions to differential equations, vol. I, n° 2, p. 189-213, (1963).
- [13] - D.L. KLEINMAN - On a iterative technique for Riccati equation computations, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-13, n° 1, (feb. 1968), p. 114-115, (correspondence).
- [14] - S. LEFSCHETZ - Stability of non-linear control systems, Academic Press, (1965).
- [15] - M.A.C. PERBET - Etude d'un système de commande numérique, optimal et auto-adaptatif, Thèse d'Université, Toulouse, (1968).
- [16] - R. POULIQUEN et A. RAULT - Identification des processus par minimisation d'une distance d'état, Centre d'Etudes et de Recherches en Automatisme, (1969).
- [17] - J.R. RAGAZZINI et G.F. FRANKLIN - Les systèmes asservis échantillonnés, Dunod, (1962).
- [18] - A. RALSTON et H.S. WILF - Méthodes mathématiques pour les calculateurs numériques, Dunod, (1966).
- [19] - J. RICHalet et F. LECAMUS - Identification des processus par minimisation d'une distance de structure. Centre d'Etudes et de Recherches en Automatisme, (1969).
- [20] - R.K. SMYTH and H.L. EKLERS - Survey of adaptive control applications to aerospace vehicles AGARD Symposium on Advanced Flight Control Concepts, (1968).
- [21] - W.M. WONHAM - On matrix quadratic equations and matrix Riccati equations, Center for Dynamical Systems, Brown University, T.R n° 67-5, (1967).
- [22] - J. ZABORSKY, R.G. MARSH, R.E. JANITCH and M.R. CHIDAMBARA - Theoretical and experimental research on digital adaptive control system, NASA CR-669, (1967).
- [23] - J. ZABORSKY, R.G. MARSH, R.E. JANITCH and M.R. CHIDAMBARA - Continuation on theoretical and experimental research on digital adaptive control system, NASA CR-810, (1967).

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Vu et approuvé

Paris, le ... 22 Décembre ... 19 .. 70

Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

L. GAUTHIER

Vu
et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

R. MALLET

ERRATA

- Page 10 - relation (I,9) : lire ... $\gamma^{n+1} u_k$...
- Page 18 - relation (II,10) : lire ... $\sum_h^n$...
 lignes 20, 21 : lire ... $\sum_{3h-1}^n$...
- Page 26 - ligne 11 : lire $b = -\frac{1}{T} \log(-\gamma')$
- Page 38 - ligne 5 : lire ... "Riccati" ...
- Page 44 - ligne 20 : lire ... relation (II,20) ...
- Page 45 - ligne 12 : lire ... se calculent ...
- Page 47 - relation (IV,16) : lire ... v_k ...
 lignes 6, 7 : lire ... v_k ...
- Page 50 - figure IV,4 : lire ~~---~~ coefficient réel, ~~---~~ coefficient identifié
- Page 68 - ligne 8 : lire $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$
- Page 70 - ligne 20 : lire ... relation (IV,10) ...

